Enseignant : Nicolas Dos Santos
TD 2609
Contrôle du 23 octobre 2023

<u>Lisez bien l'énoncé</u>, on justifiera clairement chaque réponse.

<u>Question de cours</u>

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Est-ce que la famille (V_1,V_2,V_3) est une famille base de R^3 ?

<u>Exercice 1</u> : Application linéaire

Soit f(x,y,z)= (ax+2y-z,2x+y+3z,-x+3y) et a un réel.

1. Donner les espaces de départ et d'arrivé de f et justifiez rapidement que f est linéaire.
2. Calculer le noyau de f et le rang de f en fonction de a.
3. Est-ce que f est injective ? Surjective ? Bijective ? (en fonction de a)
   Soit A la matrice représentative de f dans la base canonique des espaces de départ et d'arrivée.
4. Rappelez la base canonique et calculer A.
5. A est-elle inversible ? (en fonction de a)

<u>Exercice 2</u> : Diagonalisation de matrice

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Trouver les valeurs propres de cette matrice. Indiquer comment vous passez d'une étape à une autre à chaque fois.
2. Vérifier les résultats avec les tests classiques.
3. Déterminer les différents espaces propres.
4. La matrice est-elle diagonalisable ? Justifiez.
5. Justifier l'existence et calculer les matrices P et D telles que $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale. On rangera les valeurs propres par ordre croissant et il est inutile de calculer l'inverse de P.

<u>Exercice 3</u> : Calcul de dérivée

Soit $f(x,y) = 2xyexp(-2x+3y)$ une fonction de 2 variables.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f.
2. Déterminez les dérivées première de f.
3. Déterminez les dérivées seconde de f.

<u>Exercice 4 :</u> Exercice ramassé à la séance du 9/10 (bonus de 3 points)

Question de cours [illegible] [illegible]

Soit $\begin{cases} V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

Est ce que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$?

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -11 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -11 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

On developpe sur la premiere ligne

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det A = 21 - 11 + 2(1 - 6)$

$\Rightarrow \det A = 0$

Donc (V_1, V_2, V_3) n'est pas libre et n'est pas une base.

Exercice 1 du TD (60') 13 41 → 22

Soit $f(x,y,z) = (\alpha x + 2y - z, 2x + y + 3z, -x + 3y)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1 f est une fonction de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

2 Ker f ?

Soit $X \in \operatorname{Ker} f$. $f(x,y,z) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha x + 2y - z = 0 \\ (2+3\alpha)x + 7y = 0 \quad L_2 + 3L_1 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha y + 2y - z = 0 \\ (2+3\alpha)\times 3y + 7y = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3\alpha + 2)y - z = 0 \\ (6 + 9\alpha + 7)y = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3\alpha+2)y - z = 0 \\ (13 + 9\alpha)y = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3\alpha + 2)y - z = 0 \\ y = 0 \\ x = 3y \end{cases} \quad \text{si } 13 + 9\alpha \neq 0$$

$\Leftrightarrow \underline{x = y = z = 0}$

Si $(13 + 9\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3\alpha + 2)y - z = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

$\underline{S = \{ y(3, 1, 3\alpha + 2) \mid y \in \mathbb{R} \}}$

On a donc

$$\ker f = \begin{cases} \{\vec{0}\} & \text{si } \alpha \neq -\frac{13}{9} \\ \{y(3, 1, 3\alpha+2) \mid y \in \mathbb{R}\} & \text{si } \alpha = -\frac{13}{9} \end{cases}$$

En utilisant le theoreme du rang, on a

$rg\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f$

donc

$$rg\, f = \begin{cases} 3 & \text{si } \alpha \neq -13/9 \\ 2 & \text{si } \alpha = -13/9 \end{cases}$$

3) Si $\alpha \neq -13/9$

f est injective car $\ker f = \{\vec{0}\}$, est surjective car $rg\, f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$
et est bijective car injective et surjective

Si $\alpha = -13/9$

f n'est pas injective car $\ker f \neq \{0\}$, n'est pas surjective car $rg\, f \neq \dim \mathbb{R}$
et n'est pas bijective car pas injective

4) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$f((1,0,0)) = \begin{pmatrix}\alpha\\2\\-1\end{pmatrix}$

$f((0,1,0)) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$f((0,0,1)) = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

5) A est diagonalisable car symétrique

6) A est inversible pour $\alpha \neq -13/9$ car f est bijective
A n'est pas inversible pour $\alpha = -13/9$ car f n'est pas bijective

ontrole 1 du TD 2609

Exercice ~~1~~ 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

1, Calculons les valeurs propres de M

Soit P, le polynome caractéristique de M

$$P(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ -2 & -2 & -3-X \end{vmatrix}$$

$$P(X) = \begin{vmatrix} -X & 2 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ -2-X & 0 & -2-X \end{vmatrix} L_3 + L_1$$

$$P(X) = (-2-X) \begin{vmatrix} -X & 2 & 1 \\ 2 & -X & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant sur la dernière ligne

$$P(X) = (-2-X) \left[\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -X & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -X & 2 \\ 2 & -X \end{vmatrix} \right]$$

$$P(X) = (-2-X)(2 + X + X^2 - 4)$$

$$P(X) = (-2-X)(X^2 + X - 2)$$

1 est racine de P, on a donc

$$P(X) = (-2-X)(X-1)(X+2)$$

$$P(X) = -(X+2)^2(X-1)$$

Les valeurs propres de M sont : -2 de multiplicité 2

1 de multiplicité 1

2, Vérifions les valeurs propres

trace(M) = -3, c'est bien la somme des valeurs propres

$\det(M) = -4 - 4 + 12 = 4$, c'est bien le produit des valeurs propres

3, Soit $X \in E_{-2}$

$MX = -2X$

$\Rightarrow (M + 2I)X = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2x + 2y + z = 0$

$\Leftrightarrow z = -2x - 2y$

On a donc $\underline{E_{-2} = \{ (x, y, -2x-2y) \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \}}$

Soit $X \in E_1$

$MX = X$

$\Rightarrow (M - I)X = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z \\ 4y + 2z - y + z = 0 \\ -4y - 2z - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z \\ 3y + 3z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

On a donc $\underline{E_1 = \{ z(-1, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R} \}}$

4) $\begin{cases} \dim E_{-2} = 2 \\ \dim E_1 = 1 \end{cases}$

M est donc diagonalisable car la dimension des sous espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres associées

5) Comme M est diagonalisable, il existe D, P tels que $M = PDP^{-1}$

On a $\underline{D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\underline{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

xercice 3 TD cours

$f(x,y) = 2xy\, e^{-2x+3y}$

1) f est défini sur $\mathbb{R}^2$

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\, e^{-2x+3y} + (-2)(2xy)\, e^{-2x+3y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2y - 4xy)\, e^{-2x+3y}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x\, e^{-2x+3y} + 3(2xy)\, e^{-2x+3y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x + 6xy)\, e^{-2x+3y}$

---

3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4y\, e^{-2x+3y} - 2(2y - 4xy)\, e^{-2x+3y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (-8y + 8xy)\, e^{-2x+3y}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x\, e^{-2x+3y} + 3(2x + 6xy)\, e^{-2x+3y}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (12x + 18xy)\, e^{-2x+3y}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left((2x + 6xy)\, e^{-2x+3y} \right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (2 + 6y)\, e^{-2x+3y} - 2(2x + 6xy)\, e^{-2x+3y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (2 + 6y - 4x - 12xy)\, e^{-2x+3y}$

---

f est C^2 comme composée de fonction C^2 donc d'après le théorème de Schwarz

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (2 + 6y - 4x - 12xy)\, e^{-2x+3y}$
