

# Chapitre 3

## Fonction de plusieurs variables

### 3.1 Éléments de topologie

#### 3.1.1 Produit scalaire de deux vecteurs

**Définition** Soient deux vecteurs  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  alors le produit scalaire des deux vecteurs vaut :

$$X.Y = x_1.y_1 + \dots + x_n.y_n = \sum_{i=1}^n x_i.y_i$$

Propriétés

- Le produit scalaire est une forme bilinéaire (linéaire par rapport aux deux variables).
- Le produit scalaire est une forme symétrique.
- Deux vecteurs sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est nul.
- De plus on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz : Quels que soient  $X$  et  $Y$ , on a :  $(X.Y)^2 \leq (X.X) * (Y.Y)$

#### 3.1.2 Norme Euclidienne

**Définition** Soit  $E$  un espace. Soit  $N$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  alors  $N$  est une **norme** si et seulement si

- (i)  $N(X) = 0 \Leftrightarrow X = \vec{0}$
- (ii)  $\forall X, Y \text{ de } E : N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$
- (iii)  $\forall X \in E \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ alors } N(\lambda.X) = |\lambda|.N(X)$

**Définition** On appelle *norme euclidienne* la norme sur  $\mathbb{R}^n$  suivante :  
 $N(X) = \sqrt{X \cdot X}$ .

Cette norme est notée  $N(X) = \|X\|$

Il est en effet facile de vérifier que ceci définit bien une norme (à faire).

De plus, cette norme vérifie une autre inégalité de Cauchy

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| + \|Y\|$$

### 3.1.3 Distance Euclidienne

**Définition** Soit  $E$  un espace. Soit  $d$  une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $d$  est une *distance* si et seulement si

- (i)  $d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$
- (ii)  $\forall X, Y \text{ de } E : d(X, Y) = d(Y, X)$
- (iii)  $\forall X, Y, Z \text{ de } E : d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$

Exercice :

Montrer que si  $N$  est une norme alors  $d(X, Y) = N(X - Y)$  est une distance.

**Définition** On appelle distance euclidienne la distance sur  $\mathbb{R}^n$

définie par :  $d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

### 3.1.4 Notions de boules

**Définition** On considère  $\mathbb{R}^n$  muni d'une distance. Soit  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ .

On appelle **boule fermée** de centre  $X_0$  et de rayon  $r$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  dont la distance à  $X_0$  est inférieure ou égale à  $r$

$$B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(X, X_0) \leq r\}$$

On appelle **boule ouverte** de centre  $X_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  dont la distance à  $X_0$  est inférieure strictement à  $r$

$$B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d(X, X_0) < r\}$$

Exemple ?

### 3.1.5 Notions de voisinages

**Définition** Soit  $X \in \mathbb{R}^n$ , on appelle *voisinage* d'un point  $X$  tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui contient une boule ouverte centrée en  $X$  de rayon non nul.

On dit qu'un sous ensemble  $F$  de  $E$  est *intérieur* si  $E$  est un voisinage de chaque point de  $F$ .

Un ensemble  $E$  est **ouvert** s'il est un voisinage de chacun de ses points.

Un ensemble  $E$  est **fermé** si son complémentaire est un ouvert.

## 3.2 Limites et continuité

### 3.2.1 Domaine de définition

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

On appelle **domaine de définition** l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_1, \dots, x_n)$  soit bien définie.

$$D_f = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) \text{ est bien définie}\}$$

Exemple :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \ln(4 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

### 3.2.2 Limites

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  **tend vers la limite**  $L$  quand  $(x_1, \dots, x_n)$  tend vers  $(a_1, \dots, a_n)$  ssi :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall X \in D_f \\ \|(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)\| < \eta \Rightarrow |f(x_1, \dots, x_n) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L$$

On écrit alors

Propriétés

En dimension 1, si la fonction n'est pas définie au point  $a$  ou seulement sur un voisinage à gauche ou à droite de  $a$ , on parle tout de même de limite en  $a$  bien qu'il ne s'agisse que d'un prolongement par continuité ou d'une limite à droite ou à gauche.

— En dimension  $> 1$ , on peut remarquer que la notion de limite existe en  $a$  sur la frontière du domaine bien que dans certaines directions il n'y ait théoriquement pas de limite à proprement parler.

La définition ne dépend pas de la norme choisie sur  $\mathbb{R}^n$  donc on peut prendre n'importe quelle norme.

- La définition implique l'unicité de la limite lorsqu'elle existe.
- La limite de la somme de deux fonctions est la somme des limites (lorsque ce n'est pas une forme indéterminée).
- La limite du produit de deux fonctions est le produit des limites (lorsque ce n'est pas une forme indéterminée).

### 3.2.3 Continuité

La notion de continuité provient de la notion de limite.

**Définition** On dit que  $f$  est *continue* en  $(a_1, \dots, a_n)$  ssi :

$$\lim_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n) \\ (x_1, \dots, x_n) \neq (a_1, \dots, a_n)}} f(x_1, \dots, x_n) = f(a_1, \dots, a_n)$$

#### Propriétés

- Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $(a_1, \dots, a_n)$  alors  $f + g$  et  $f * g$  sont continues en  $(a_1, \dots, a_n)$ .
- Si de plus  $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est continue en  $(a_1, \dots, a_n)$ .
- La composée de fonctions continues est continue : si  $g$  est continue en  $(a_1, \dots, a_n)$  et si  $f$  est continue en  $g(a_1, \dots, a_n)$  alors  $f \circ g$  est continue en  $(a_1, \dots, a_n)$ .
- Les fonctions standards (polynômes, fraction, ln, racine, exponentielle) sont continues sur l'intérieur de leur domaine de définition.

#### Exemple :

Étudiez la continuité de  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

## 3.3 Dérivées partielles

### 3.3.1 Rappel : fonction d'une variable

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un voisinage de  $x \in \mathbb{R}$ .

La dérivée à droite en  $x$  est :

$$f'_d(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La dérivée à gauche en  $x$  est

$$f'_g(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Lorsque ces deux dérivées existent et sont égales, on dit que  $f$  est **dérivable** en  $x$  et on pose  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

#### Formule de dérivation usuelle

Soit  $a$  un réel différent de 0 :  $(x^a)' = a.x^{a-1}$  (Formule à montrer pour  $n$  entier).

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u * v)' = u' * v + u * v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u \circ v)' = v' * u' \circ v \text{ donc } (u(v(x)))'(a) = v'(a) * u'(v(a))$$

#### Exemple :

Trouvez la formule de dérivation de  $\ln f(x)$ .

On peut ensuite définir la dérivée  $n$ -ème comme la dérivée de la dérivée  $n - 1$ -ème.

### 3.3.2 Dérivée d'une fonction de $n$ variables

Soit  $f$  une fonction de  $n$  variables,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

On définit la dérivée par rapport à  $x_i$  en  $(a_1, \dots, a_n)$

$$f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

#### Exemple :

$$f(x, y) = e^{xy} + x^2$$

**Définition** On appelle **gradient** de  $f$  le vecteur colonne formée des dérivées premières de  $f$  :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Il faut noter que la différentielle présentée plus loin est une application linéaire dont la matrice représentative est le vecteur ligne qui est la transposée du gradient.

Exemple :

Calculez le gradient de la fonction suivante

$$f(x, y) = 4x^2y^2 + 3xy^3 + 5y + 4$$

(Explication graphe...)

### 3.3.3 Interprétation économique

#### Productivité marginale

Soit  $Q = F(K, L)$  une fonction de production où  $K$  désigne le capital et  $L$  le travail.

Alors, la dérivée partielle de  $Q$  par rapport à  $K$  notée  $\frac{\partial Q}{\partial K}$  est appelée productivité marginale du capital.

De même,  $\frac{\partial Q}{\partial L}$  est appelée productivité marginale du travail.

Exemple :

$$Q = 4 \cdot K^{3/4} \cdot L^{1/4}$$

Calculez la quantité produite et les productivités marginales pour  $K=10000$  et  $L=625$ .

$$\text{A.N. } \frac{\partial Q}{\partial K} = 1.5 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial L} = 8$$

Cela veut dire que, si  $K$  augmente de 10 unités, alors la quantité produite augmentera environ de  $\frac{\partial Q}{\partial K} * 10 = 15$  unités.

De même, si  $L$  diminue de 2 unités, alors la quantité produite diminuera environ de  $\frac{\partial Q}{\partial L} * 2 = 16$  unités.

#### Élasticité

Soit  $D = D(P, P_i, R)$  la demande d'un bien qui dépend en général du prix de ce bien  $P$ , du prix d'un autre bien (substituable)  $P_i$  et du revenu  $R$ .

La dérivée partielle  $\frac{\partial D}{\partial P}$  mesure le taux de variation de la demande en fonction du prix.

**Définition** On définit l'élasticité de la demande par rapport à son prix comme le rapport

$$\epsilon_{D\%P} = - \frac{\% \text{ variation de la demande}}{\% \text{ variation de son prix}} = - \frac{\frac{\partial D}{D}}{\frac{\partial P}{P}}$$

$$\text{Donc } \epsilon_{D\%P} = - \frac{P}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P}$$

Un bien est dit **inélastique** si l'élasticité est comprise entre 0 et 1.

Un bien est dit **élastique** si l'élasticité est comprise entre 1 et  $+\infty$ .

On peut de même définir :

L'**élasticité prix croisée** de la demande : c'est l'élasticité de la demande par rapport au prix  $P_i$ .

$$\epsilon_{D\%P_i} = \frac{P_i}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_i}$$

*L'élasticité revenu* : c'est l'élasticité de la demande par rapport au revenu :

$$\epsilon_{D\%R} = \frac{R}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial R}$$

### 3.3.4 Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n); \dots; f_p(x_1, \dots, x_n))$  où  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

On dit alors que  $F$  est continue en  $(a_1, \dots, a_n)$  si chacune des  $f_i$  est continue en  $(a_1, \dots, a_n)$ .

On dit alors que  $F$  est dérivable en  $(a_1, \dots, a_n)$  si chacune des  $f_i$  est dérivable en  $(a_1, \dots, a_n)$ .

De même  $F$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega$  si chacune des  $f_i$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega$ .

Lorsque  $F$  est dérivable sur  $\Omega$ , on définit la **jacobienne** de  $F$  comme la matrice suivante :

$$J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\nabla f_1 \\ \vdots \\ {}^t\nabla f_p \end{pmatrix}$$

Remarque :

La jacobienne d'une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}$  est tout simplement la transposée du gradient (i.e. le gradient écrit comme vecteur ligne).

Exemple :

Calculez la jacobienne de la fonction suivante

$$f(x, y) = (x^2 + y, e^y)$$

### 3.3.5 Dérivée partielle d'ordre supérieur à 1

On peut définir aussi les dérivées partielles d'ordre  $n$  quelconque. Pour une fonction dépendante de  $n$  variables, on a  $n^2$  dérivées secondes.

Ainsi, pour une fonction de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on a 4 dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$$

Il faut retenir que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  veut dire que l'on dérive d'abord par rapport à  $x$  puis par rapport à  $y$ .

Exemple :

$$f(x, y) = x^3 \cdot y^2 + y + 5$$

Remarque :

Pour qu'une fonction soit dérivable en un point il faut qu'elle soit continue en ce point.

**Définition** On dit qu'une fonction  $f$  est  $C^n$  sur un ensemble  $\Omega$  si elle est dérivable  $n$  fois, la dérivée  $n$ -ième étant continue sur cet ensemble.

Remarque :

Les fonctions standards (polynôme, ln, racine, exponentielle, fraction) sont  $C^\infty$  sur l'intérieur de leur domaine de définition.

**Définition** On appelle **matrice hessienne** de  $f$  la matrice formée des dérivées secondes de  $f$ .

$$\text{Ainsi } D^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

En fait on voit que cette matrice hessienne correspond à la transposée de la jacobienne du gradient de  $f$  où le gradient est vu comme une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Exercice :

Écrire la matrice hessienne générale d'une fonction de 3 variables  $x, y$  et  $z$ .

**Proposition (Théorème de Schwartz)**

Si une fonction  $f$  est  $C^2$  sur un voisinage de  $(x_0, y_0)$  alors :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ .

On peut en déduire que sur un domaine où  $f$  est  $C^2$  la hessienne est une matrice symétrique.

Ce théorème se généralise à des fonctions  $C^n$ . On a alors la commutativité de l'opérateur dérivation par rapport aux variables jusqu'à la dérivée  $n$ -ième.

## 3.4 Différentielle

### 3.4.1 Définition

**Définition** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Alors si  $f$  est dérivable on peut définir sa différentielle en  $(a_1, \dots, a_n)$

$$df_{(a_1, \dots, a_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) . dx_i$$

Propriétés

On définit  $df_{(a_1, \dots, a_n)}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) . X_i$ .



La différentielle en  $(a_1, \dots, a_n)$  est une forme linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

Remarque :

$$df_{(a_1, \dots, a_n)} = \nabla f_{(a_1, \dots, a_n)} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

La différentielle exprime localement en un point quels sont les accroissements de  $f$  en fonction d'une petite variation d'une ou plusieurs des variables.

### 3.4.2 Dérivation d'une composée

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   $g$  représente l'équation d'une courbe dans  $\mathbb{R}^n$ .

On peut écrire  $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$

Supposons que  $g$  soit dérivable en  $t_0$  et que  $f$  soit dérivable en  $g(t_0) = (a_1, \dots, a_n)$

alors  $f \circ g$  est dérivable en  $t_0$  et on a :

$$(f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^n g'_i(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))$$

On peut aussi écrire ce résultat sous la forme

$$(f \circ g)'(t) = J_g(t) \cdot \nabla f(g(t))$$

Exemple :

Calculez la dérivée de la fonction suivante  $f(x, y) = x^2 + xy$  le long du chemin défini par  $(x, y) = (2t, t^2)$  en utilisant la formule précédente. Retrouvez votre résultat par un calcul direct.

### 3.4.3 Théorème des accroissements finis

Rappel : Fonction d'une variable

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Explication graphique...

**Proposition (Théorème des accroissements finis)**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue et dérivable sur un ensemble ouvert et convexe  $\Omega$ . Soit  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et  $b = (b_1, \dots, b_n)$  deux points de  $\Omega$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  (segment joignant  $a$  et  $b$ ) tel que :

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(c) \cdot (b_i - a_i)$$

(Preuve...)

## 3.5 Fonctions homogènes

La notion d'homogénéité apparaît très souvent en économie.

### 3.5.1 Définition

**Définition** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$f$  est dite **homogène de degré  $k$**  si et seulement si :

$$\forall \lambda > 0, \forall (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n :$$

$$f(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda^k \cdot f(X_1, \dots, X_n)$$

Si  $f$  est homogène de degré  $k < 1$ , on dit que  $f$  admet des **rendements d'échelle décroissants**.

Si  $f$  est homogène de degré  $k = 1$ , on dit que  $f$  admet des **rendements d'échelle constants**.

Si  $f$  est homogène de degré  $k > 1$  on dit que  $f$  admet des **rendements d'échelle croissants**.

Exemple :

Soit la fonction de Cobb-Douglas suivante

$$f(X_1, X_2) = X_1^a \cdot X_2^b. \text{ Montrez qu'elle est homogène.}$$

### 3.5.2 Formule d'Euler

**Proposition (Théorème d'Euler)**

Soit  $f$  une fonction différentiable sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , alors on a équivalence entre :

(i)  $f$  est homogène de degré  $k$  sur  $\Omega$ .

$$(ii) \forall X \in \Omega : \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(X) X_i = k \cdot f(X)$$

(Preuve à faire).

Remarque :

Cela est équivalent à :

$$df_{(X_1, \dots, X_n)}(X_1, \dots, X_n) = k \cdot f(X_1, \dots, X_n)$$

**Proposition** Si  $f$  est homogène de degré  $k$  sur  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et, si  $f$  est dérivable par rapport à  $x_i$ , alors sa dérivée partielle  $f'_{x_i}$  est homogène de degré  $k - 1$  sur  $\Omega$ .

Preuve...

Exemple :

$$f(x, y) = (x + y)^{1/2}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{y}{z}\right)$$

## 3.6 Développements limités

Un développement limité d'ordre  $n$  en un point  $a$  est la meilleure approximation de la courbe en  $a$  à l'ordre  $n$ . C'est à dire que c'est le meilleur polynôme d'ordre  $n$  qui approxime la fonction en  $a$ .

### 3.6.1 Rappel : fonction d'une variable

**Proposition** Soit  $f$  une fonction  $C^{k+1}$  sur un ouvert convexe  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , soit  $x_0 \in \Omega$ , alors  $\forall x \in \Omega$  il existe  $c \in ]x_0, x[$  (ou  $]x, x_0[$ ) tel que :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \cdot f^{(i)}(x_0) \cdot (x - x_0)^i + \frac{1}{(k+1)!} \cdot f^{(k+1)}(c) \cdot (x - x_0)^{k+1}$$

**Définition** On appelle *tangente* en  $x_0$  la droite approximant le mieux  $f$  en  $x_0$ , son équation est :

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \\ y &= f(x_0) + df_{(x_0)}(x - x_0) \end{aligned}$$

**Définition** Le développement limité de  $f$  en un point  $a$  à l'ordre  $n$  est :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=1}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + (x-a)^n h(x-a) \\ \text{où } \lim_{x \rightarrow a} h(x-a) &= 0 \end{aligned}$$

On peut aussi le noter

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n)$$

Cette formule est valable pour  $x$  proche de  $a$ .

On peut remarquer que l'équation de la tangente en  $a$  correspond au DL en  $a$  à l'ordre 1 sans le reste, on appelle ceci l'approximation affine de  $f$  en  $a$ .

Le DL à l'ordre 2 en  $a$  sans le reste s'appelle l'approximation quadratique de  $f$  en  $a$ . Il s'agit de la meilleure parabole approximant  $f$  au point  $a$ .

**Proposition** Le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f \times g$  en  $a$  correspond au produit des développements limités de  $f$  et de  $g$  à l'ordre  $n$  en  $a$  après avoir supprimé les termes d'ordre supérieur à  $n$  qui font en fait partie du reste.

Pour la preuve, il suffit de montrer par récurrence que  $(f \times g)^{(k)} =$

Exemple :

DL à l'ordre 2 en 1 de  $f(x) = e^x \cdot \ln(x)$

*Calcul direct :*

$$f(1) = 0; f'(x) = e^x \cdot \ln(x) + \frac{e^x}{x}; f''(x) = e^x \cdot \ln(x) + 2\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

$$f(x) = e \cdot (x-1) + e \cdot \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

*Calcul par multiplication :*

Le DL en 1 de  $\ln$  vaut :  $\ln(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$

Le DL en 1 de  $e^x$  vaut :  $e^x = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$

Donc, par multiplication :

$$f(x) = e \cdot (x-1) - e \frac{(x-1)^2}{2} + e(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

Donc :

$$f(x) = e \cdot (x-1) + e \cdot \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

**Proposition** Le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f \circ g$  en  $a$  correspond au développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $g(a)$  après avoir remplacé  $x$  par le développement limité de  $g$  à l'ordre  $n$  en  $a$  et après avoir supprimé les termes d'ordre supérieur à  $n$  qui font en fait partie du reste.

Exemple :

DL à l'ordre 2 en 0 de  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$

*Calcul direct :*

$$f(0) = \ln(1) = 0; f'(x) = -\frac{1}{x+1}; f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{donc } f(x) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

*Calcul par composition :*

En 0, on a :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

En 1, on a :

$$\ln X = X - 1 - \frac{(X-1)^2}{2} + o((X-1)^2)$$

Donc

$$f(x) = (1 - x + x^2) - 1 - \frac{(1 - x + x^2 - 1)^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = -x + x^2 - \frac{(x^2 - x)^2}{2} + o(x^2)$$

$$f(x) = -x + x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Autre exemple

$f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$  à l'ordre 2 en 0.

Développement limité standard à l'ordre  $n$

$$\text{En } 0 : \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\text{En } 0 : e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\text{En } 0 : \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot x^k + o(x^n)$$

### 3.6.2 DL d'une fonction de 2 variables

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega$ , soit  $(x_0, y_0) \in \Omega$ .

Alors le développement limité de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  vaut :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f_{(x_0, y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot (x - x_0, y - y_0) \cdot D^2 f_{(x_0, y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &+ o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes correspondent à l'approximation affine de la fonction.

Les trois premiers termes correspondent à l'approximation quadratique de la fonction.

Enfin le dernier terme s'appelle le reste.

Les éléments sans le dernier terme s'appelle le polynôme de Taylor.

### 3.6.3 Plan tangent

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$ , soit  $(x_0, y_0) \in \Omega$  alors on peut représenter la fonction dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  en prenant  $z = f(x, y)$  en tout point  $(x_0, y_0)$  on peut définir le plan tangent et son équation est :

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

### 3.6.4 DL à l'ordre 2 d'une fonction de $n$ variables

La formule du DL pour une fonction de 2 variables se généralise facilement en utilisant la notation du gradient et de la matrice hessienne.

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^2$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , soit  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$ .

Alors le développement limité de  $f$  en  $X_0$  vaut

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \nabla f_{X_0} \cdot (X - X_0) \\ &+ \frac{1}{2} (X - X_0) \cdot D^2 f_{X_0} \cdot (X - X_0) \\ &+ o(\|X - X_0\|^2) \end{aligned}$$

### 3.7 Fonctions implicites

Soit  $F$  une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  alors les points de la courbe peuvent se définir au travers d'une équation du type  $F(x, y) = C$

Où  $C$  est une constante.

On peut alors se demander

1) Si on peut écrire de manière implicite  $y = g(x)$  sur un voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$  de la courbe.

2) Peut-on alors prévoir les variations de  $y$  compte tenu d'une variation en  $x$ ?

#### Proposition

On considère la courbe définie par :

$$F(x, y) = C$$

Où  $F(x, y)$  est une fonction continue et différentiable définie sur une boule centrée en  $(x_0, y_0)$  avec  $F(x_0, y_0) = C$ .

Alors, si  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , il existe une fonction  $g$  définie sur un voisinage  $D$  de  $x_0$  telle que :

$$(i) \ y_0 = g(x_0)$$

$$(ii) \ F(x, g(x)) = C \text{ pour tout } x \in D$$

$$(iii) \ g'(x_0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

(Montrer que  $ii \Rightarrow iii \dots$ )

Cette proposition se généralise sans difficulté au cas de  $n$  variables

#### Proposition (Théorème des fonctions implicites)

On considère la courbe définie par :

$$F(x_1, \dots, x_n) = C$$

Où  $F(x_1, \dots, x_n)$  est une fonction continue et différentiable définie sur une boule centrée en  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  avec  $F(x_1^0, \dots, x_n^0) = C$ .

Alors, si  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$ , il existe une fonction  $g_i$  définie sur un voisinage  $D$  de  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  (le  $x_i^0$  n'apparaissant pas) telle que :

$$(i) \ x_i^0 = g_i(x_1^0, \dots, x_n^0) \text{ (le } x_i^0 \text{ n'apparaissant pas)}.$$

(ii)  $F(x_1, \dots, g_i(x_1, \dots, x_n), \dots, x_n) = C$  pour tout  $x \in D$ .

(iii)  $\forall k \neq i : \frac{\partial g}{\partial x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)}$

Exemple :

Soit  $f(x, y, z) = z^3 + 3.x.z + 2.x^3 + x.y^2 + y^3$

On considère la courbe d'équation

$f(x, y, z) = 0$

Montrez l'existence d'une fonction implicite en  $z$  au point  $(1, 2, -2)$

Calculez ses dérivées partielles.

### 3.8 Exercice

Soit  $f(x, y) = \ln(1 + xy)$

- (1) Déterminez et représentez le domaine de définition de  $f$ .
- (2)  $f$  est-elle  $C^\infty$  sur son domaine de définition ?
- (3) Calculez les dérivées premières de  $f$ .
- (4) Calculez toutes les dérivées secondes de  $f$ .
- (5) Donnez le développement limité à l'ordre 2 de  $f$  en  $(0, 0)$
- (6) Donnez  $\widehat{f}_{(0,0)}$  l'approximation affine de  $f$  en  $(0, 0)$
- (7) Donnez  $\widehat{\widehat{f}}_{(0,0)}$  l'approximation quadratique de  $f$  en  $(0, 0)$
- (8) Donnez une valeur approchée de  $f$  en  $(0.1, 0.1)$