Thème 4 : Optimisation Ausan CALLOO.

Ex 1

(1)

(a) On calcule le produit scalaire $\vec{u_2}\cdot\vec{u_3} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = -1\times 1 + 0\times(-2) + 1\times 1 = 0$

Produit scalaire nul $\Rightarrow$ $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont orthogonaux.

(b) $C(X) = x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$.

Une forme quadratique peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

Pour une fonction de $\mathbb{R}^3$, cela s'écrit $\overbrace{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz}^{Q(X)}$.

La matrice associée est $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix} \rightarrow$ matrice symétrique.

Par identification entre $C(X)$ et $Q(X)$:

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}=1 & a_{22}=1 & a_{33}=1\\ 2a_{12}=-1 & \Rightarrow a_{12}=-\frac{1}{2} & 2a_{23}=-1\\ 2a_{13}=-1 & \Rightarrow a_{13}=-\frac{1}{2} & \Rightarrow a_{23}=-\frac{1}{2}. \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

A étant symétrique (${}^tA = A$) $\Rightarrow$ A est <u>diagonalisable</u>.

(c) $P(\lambda)$: polynôme caractéristique de $A = \det(A-\lambda I)$.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-\lambda\end{vmatrix} = \underset{C_1+C_2+C_3}{\begin{vmatrix}-\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\lambda & 1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\lambda & -\frac{1}{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}} = -\lambda\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

factorisation par rapport à la 1ère colonne.

$$= -\lambda\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2}-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}-\lambda\end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2-L_1\\ L_3-L_1.\end{array}$$

$$= -\lambda\left(\frac{3}{2}-\lambda\right)^2.$$

Pour obtenir les valeurs propres, on résout $P(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=0$ et $\lambda=\frac{3}{2}$.

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2=\lambda_3=\frac{3}{2}$ valeur propre double.

(d) Calcul des espaces propres et des vecteurs propres associés aux valeurs propres :

$\lambda_1 = 0$, $E_{\lambda_1 = 0}$

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}x + y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= \tfrac{y+z}{2} \\ y &= \tfrac{x+z}{2} \\ z &= \tfrac{x+y}{2} \end{aligned}$$

x est le milieu de y et z, y est le milieu de x et z et z est le milieu de x et y. $\Rightarrow x = y = z$.

Soit z paramètre de solutions $\Rightarrow E_{\lambda_1 = 0} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \vec{\text{vect}}\{(1,1,1)\}$.

$\underline{\vec{V}_1 = (1,1,1)}$. (dernière composante $= 1$, donc c'est OK).

$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$, $E_{\lambda_2} = E_{\lambda_3} = E_{\lambda = 3/2}$.

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

y et z paramètres.

$$\begin{aligned} x &= -y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\Rightarrow E_{\lambda = 3/2} = \vec{\text{vect}}\{(-1,1,0), \underbrace{(-1,0,1)}_{\hookrightarrow \vec{w}_2}\}.$$

Un des vecteurs propres calculés a déjà sa dernière composante $= 1$, et c'est exactement $\vec{w}_2$ de la question (a). Le deuxième vecteur propre $(-1,1,0)$ reste problématique car sa dernière composant $= 0$.

On va donc chercher un vecteur propre $\in E_{\lambda = 3/2}$ qui a une dernière composante $= 1$. Or $\vec{w}_2 \in E_{\lambda = 3/2}$ et est $\perp$ à $\vec{w}_3$. On va donc ~~essayer de~~ déterminer si $\vec{w}_3 \in E_{\lambda = 3/2}$ aussi (car en plus d'être $\perp$ à $\vec{w}_2$, sa dernière composante $= 1$ et la question (a) doit bien servir à quelque chose ....).

$$\vec{w}_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ avec des solutions pour les couples (α_1, α_2) pour s'assurer que $\vec{w}_3$ peut se décomposer sur des vecteurs de $E_{\lambda = 3/2}$.

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 - \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 &= -2 \\ \alpha_2 &= 1 \end{aligned}\right) \Rightarrow \vec{w}_3 \in E_{\lambda = 3/2}.$$

$E_{\lambda=3/2}$ est généré par $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ ou alors $\{\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ 3

On choisit la 2ème solution car $\vec{w}_2$ et $\vec{w}_3$ respectent les critères demandées.

$$E_{\lambda=3/2} = \vec{ect}\{\vec{w}_2,\vec{w}_3\} = \vec{ect}\{\vec{V}_2,\vec{V}_3\}. \quad \underline{\vec{V}_2 = \vec{w}_2, \ \vec{V}_3 = \vec{w}_3}.$$

On sait $\vec{w}_2\cdot\vec{w}_3 = 0$ (question a). Quant à $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2$ et $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_3$, on peut vérifier qu'ils valent 0.

<u>2ème méthode</u>

$(\vec{V}_1)$ et $(\vec{V}_2,\vec{V}_3)$ sont $\perp$ car ce sont des vecteurs propres de 2 espaces propres associés à des valeurs propres différentes.

A étant symétrique, les vecteurs propres associés à des espaces différents sont $\perp$. $\Rightarrow$ ($\vec{V}_1$ et $\vec{V}_3$) et ($\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$) sont donc $\perp$.

c). Le noyau de A, Ker A correspond à $E_{\lambda_1=0}$

$$\text{Ker } A = E_{\lambda_1=0} = \vec{ect}\{(1,1,1)\}.$$

Soit f l'application linéaire qui est définie comme :

$f : \underset{(E)}{\mathbb{R}^3} \to \underset{(F)}{\mathbb{R}^3}$ et qui représente l'application associée à A.

$\dim(\text{Ker } f) = 1$. n° de col de A $=\dim E = 3$.

— lignes — $= \dim F = 3$.

Théorème du rang : $\dim(\text{Ker } f) + \text{rang } f = \dim E$.

$$\Rightarrow \underline{\text{rang } f = 2 = \text{rang } A}.$$

d) On veut que la matrice de passage P soit orthonormée.

Or $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont $\perp$ 2 à 2 $\Rightarrow$ il suffit ~~des~~ les normer :

On définit $\|\vec{V}\| = \left\|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (Rappel de L1 ...).

$$\vec{U}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{U}_2 = \frac{\vec{V}_2}{\|\vec{V}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \vec{U}_3 = \frac{\vec{V}_3}{\|\vec{V}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&3/2&0\\0&0&3/2\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix} \quad \underline{A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP}.$$

P étant ~~orthonorm~~ orthonormée $\Rightarrow P^{-1} = {}^tP$

g). Question technique mais avec un peu de manipulation de vecteurs et de matrice, c'est assez simple à traiter :

$C(X)$ est une forme quadratique qui n'est pas sous forme canonique → il y a des termes croisés xy, xz, yz.

On va procéder à un changement de variables comme suit :

$$C(X) = {}^tXAX \quad \text{(décomposition d'une forme quadratique → voir cours)}$$
$$= {}^tX P D {}^tP X \quad \text{(A est décomposée sur une matrice diagonale)}$$
$$= ({}^tX P) D ({}^tP X). \quad \text{(rien)}.$$
$$= {}^t({}^tPX) D ({}^tPX) \quad \text{(car } {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \text{ → voir cours)}.$$
$$= {}^tF D F \quad \text{(en posant } F = {}^tPX\text{)}.$$

On change donc de variables X à F.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Calcul de $F = {}^tPX = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+z) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(x-2y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$

h) $C(F) = {}^tFDF = (f_1 \; f_2 \; f_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

$$= 0 \times f_1^2 + \frac{3}{2} \times f_2^2 + \frac{3}{2} f_3^2.$$

C'est une forme quadratique canonique ⇒ termes en carrés suffisent : $0, +\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}$.

⇒ C est une forme semi-définie positive.

i) $C(X) = x^2 + y + z^2 - xy - xz - yz$.

$$\left.\begin{aligned} C'_x(X) &= 2x - y - z \\ C'_y(X) &= -x + 2y - z \\ C'_z(X) &= -x - y + 2z \end{aligned}\right) \quad \begin{aligned} C'_x &= 0 \\ C'_y &= 0 \\ C'_z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -x - y + 2z &= 0 \end{aligned} \iff x = y = z$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a une infinité de points candidats ⇒ droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calcul de la matrice hessienne :

$C''_{x^2} = 2 \quad C''_{y^2} = 2 \quad C''_{z^2} = 2 \quad C''_{xz} = -1 = C''_{zx} \quad C''_{xy} = -1 = C''_{yx} \quad C''_{yz} = -1 = C''_{zy}$

$$D^2 C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2A.$$

(par application du théorème de Schwarz car C est C^2 sur $\mathbb{R}^3$).

D^2C est de la même forme que A. On sait que C est semi-définie positive $\Rightarrow$ A est semi-définie positive. Idem pour D^2C.

Donc, les points candidats sont des minima. Ces minima sont globaux car D^2C ne dépend pas de x, y ou z.

Autre méthode : calcul des mineurs diagonaux principaux de D^2C.

- Mineur d'ordre 1 $\to$ élément en haut à gauche de D^2C $= 2 > 0$
- —— 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - (-1\times -1) = 3 > 0$
- —— 3 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

2 mineurs diagonaux principaux > 0, 1 mineur diagonal principal $= 0$
$\Rightarrow$ matrice hessienne semi-définie positive.

Ex 2

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 + x - 2y.$$

(a). f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car elle est composée (somme, produit) de fonctions polynômiales qui sont elles-mêmes C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) $f'_x(x,y) = 2x + 2y + 1. \qquad f'_y(x,y) = 2x + 8y - 2.$

(c) $f''_{x^2}(x,y) = 2. \qquad f''_{y^2} = 8 \qquad f''_{yx} = 2 = f''_{xy}$ car Schwarz s'applique.

(d). $D^2 f = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Pour déterminer si f est convexe ou concave sur $\mathbb{R}^2$, il faut calculer les valeurs propres de $D^2 f$ (~~forme~~ nature de la forme f).

Or, $\sum \lambda_i = \text{Trace } D^2 f = 2+8 = 10$ et $\prod \lambda_i = \det D^2 f = 2\times 8 - 2\times 2 = 12$. Le produit des val. propres $= 12 > 0 \Rightarrow$ les v.p sont de même signe. Leur somme est aussi positive $\Rightarrow$ les v.p de $D^2 f$ sont > 0.

Thème 4 - Optimisation :

Ex 3

(a) $f_1(x,y) = xy - x^2 - y^2$.

f_1 est une fonction polynomiale en x et y, donc elle est définie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\Rightarrow D_{f_1} = \mathbb{R}^2$.

Pour trouver, les points critiques, il faut que ces derniers vérifient les conditions ~~de~~ nécessaires de 1er ordre :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x} = y - 2x = 0 \quad - (1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial y} = x - 2y = 0 \quad - (2)$$

De (1), on en déduit que $y = 2x$ que l'on substitue dans (2), $x = 2\cdot(2x)$, et le seul x qui vérifie cette condition est $x=0$. On en déduit que $y=0$ aussi $(y=2x)$.

On a un seul extremum $(0,0)$.

La nature de ce point se trouve en appliquant la condition suffisante de 2nd ordre.

$$f''_{1_{x^2}} = -2 \quad f''_{1_{y^2}} = -2 \quad f''_{1_{yx}} = 1 \quad f''_{1_{xy}} = 1.$$

$$D^2_{f_1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\det D^2 f_1 = (-2)\times(-2) - 1 = 3 > 0$
$\Rightarrow$ les deux valeurs propres de $D^2 f_1$ sont du même signe.

$Tr(D^2 f_1) = -2 + (-2) = -4 \Rightarrow$ les deux valeurs propres sont négatives

Ici, $D^2 f_1$ est indépendante de x et y $\Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $D^2 f_1$ est définie négative et donc f_1 est strictement concave.

$\Rightarrow (0,0)$ est un maximum global de f_1 avec $f(0,0) = 0$.

(b) $f_2(x,y) = xy - \ln(x^2+y^2)$. ②

Ici, il y a une fonction logarithme => il faut être vigilant sur le domaine de définition.

Dans le log, il y a des valeurs de x et y élevées au carré => ces valeurs sont toujours positives si $x>0$ ou $x<0$ et $y>0$ ou $y<0$

Par contre f_2 n'est pas définie en $(0,0)$.

$\Rightarrow D_{f_2} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour trouver les extremums, on applique la condition nécessaire de 1er ordre :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y - \frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x - \frac{2y}{x^2+y^2} = 0$$

Dans ce système d'équations, il est à noter que l'on peut se permettre de diviser par x ou y car $(0,0) \notin D_{f_2}$.

$$\Rightarrow x^2+y^2 = \frac{2x}{y} \quad \text{et} \quad x^2+y^2 = \frac{2y}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{y} = \dfrac{2y}{x} & \Rightarrow x^2 = y^2 \quad (1) \\ x^2+y^2 = \dfrac{2x}{y} & \Rightarrow x^2 = \dfrac{y}{x} \quad (2) \end{cases}$$

De (1), on en déduit que $x = y$ ou $x = -y$.

Si $x=y$, on substitue dans (2), $\Rightarrow x^2 = 1$ et donc $x=y=1$ ou $x=y=-1$.

Si $x=-y$, en substituant dans (2), on trouve $x^2=-1$, ce qui n'est pas possible.

Nous avons ainsi 2 pts candidats : $(1,+1)$ et $(-1,-1)$.

Pour trouver la nature des points, calculons la matrice hessienne :

$$f''_{2,x^2} = -\frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2.\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{2,y^2} = -\frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2.(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f''_{2,yx} = 1 + \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} = f''_{2,xy}$$ car on peut utiliser le théorème de Schwarz.

$$D^2 f_2 = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 2(x^2+y^2) & (x^2+y^2)^2+4xy \\ (x^2+y^2)^2+4xy & 2\cdot(y^2-x^2) \end{pmatrix}$$

Cette hessienne est locale à chaque point.

Pour $(1,1)$, $D^2 f_2(1,1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det D^2 f_2 = -4 \Rightarrow$ les deux valeurs propres sont de signe opposé. $\Rightarrow D^2 f_2(1,1)$ n'est pas définie.

$(1,1)$ est un point selle.

Pour $(-1,-1)$, $D^2 f_2(-1,-1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme précédemment, $(-1,-1)$ est un point selle.

(c) $f_3(x,y) = y^4 + x^2 - 2y^2$.

f_3 est fonction polynomiale en x et y. $\Rightarrow D_{f_3} = \mathbb{R}^2$

Pour trouver les points critiques, on annule les dérivées partielles premières de f_3 :

$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 2x = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 4y^3 - 4y = 0$

Ce qui revient à résoudre $\begin{cases} x = 0 & -① \\ 4y(y^2-1) = 0 = 4y(y-1)(y+1) & ② \end{cases}$

De ②, on en déduit que $y = -1, 0$ ou 1.

Nous avons ainsi 3 pts candidats : $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,1)$.

Pour déterminer leur nature, nous calculons la matrice hessienne : $f''_{x^2} = 2 \quad f''_{y^2} = 12y^2 - 4 \quad f''_{xy} = 0 = f''_{yx}$

$$D^2 f_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

$D^2 f_3$ dépend de y, les extrema sont a priori locaux.

Pour $(0,-1)$, $D^2 f_3(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. 2 v.p > 0

$\Rightarrow D^2 f_3(0,-1)$ est définie positive $\Rightarrow$ convexe.

$(0,-1)$ est un minimum local $f(0,-1) = -1$

Pour $(0,0)$, $D^2 f_3(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ non-définie $\Rightarrow$ point selle.

Pour $(0,1)$ $D^2 f_3(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,1)$ est un minimum local $f(0,1) = -1$.

Ex 7 : éléments de correction.

Optimiser $x^2 - y^2$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ $\quad J_g = (2x, 2y)$. J_g est de rang maximal $(=1)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. $(0,0)$ ne vérifie pas $g \Rightarrow$ la contrainte est qualifiée partout sur $\mathbb{R}^2$ sauf en $(0,0)$.

$$L = f(x,y) - \lambda g(x,y) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2+y^2-1)$$

$L'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \qquad 2x(1-\lambda) = 0 \qquad x = 0$ ou $\lambda = 1$

$L'_y = -2y - 2\lambda y = 0 \qquad -2y(1+\lambda) = 0 \qquad y = 0$ ou $\lambda = -1$

$L'_\lambda = -(x^2+y^2-1) = 0 \qquad x^2+y^2-1 = 0 \qquad x^2+y^2-1 = 0$

Si $x = 0$, $\lambda = -1$, $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ $\quad (0,1)$ ou $(0,-1)$ $\lambda = -1$

Si $\lambda = 1$, $y = 0$, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ $\quad (1,0)$ ou $(-1,0)$ $\lambda = 1$.

$L''_{x^2} = 2 - 2\lambda \quad L''_{y^2} = -2-2\lambda \quad L''_{xy} = 0 = L''_{yx}$.

$$\Rightarrow D^2 L = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & -2-2\lambda \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 1 \Rightarrow$ Pour $(1,0)$ et $(-1,0)$, $D^2 L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ est semi-définie négative. $\Rightarrow$ Maxima globaux $f(1,0) = f(-1,0) = 1$.

$\lambda = -1 \Rightarrow$ Pour $(0,-1)$ et $(0,1)$ $D^2 L = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semi-définie positive. $\Rightarrow$ Minima globaux $f(0,-1) = -1$

Calcul de la matrice hessienne :

$C''_{x^2} = 2 \quad C''_{y^2} = 2 \quad C''_{z^2} = 2 \quad C''_{xz} = -1 = C''_{zx} \quad C''_{xy} = -1 = C''_{yx} \quad C''_{yz} = -1 = C''_{zy}$

$$D^2C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2A.$$

(par application du théorème de Schwarz car C est C^2 sur $\mathbb{R}^3$).

D^2C est de la même forme que A. On sait que C est semi-définie positive $\Rightarrow$ A est semi-définie positive. Idem pour D^2C.

Donc, les points candidats sont des minima. Ces minima sont globaux car D^2C ne dépend pas de x, y ou z.

Autre méthode : calcul des mineurs diagonaux principaux de D^2C.

- Mineur d'ordre 1 $\to$ élément en haut à gauche de D^2C $= 2 > 0$
- ——— 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - (-1\times -1) = 3 > 0$
- ——— 3 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

2 mineurs diagonaux principaux > 0, 1 mineur diagonal principal $= 0$
$\Rightarrow$ matrice hessienne semi-définie positive.

Ex 2

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 + x - 2y.$$

(somme, produit)

(a). f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car elle est composée de fonctions polynômiales qui sont elles-mêmes C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) $f'_x(x,y) = 2x + 2y + 1. \qquad f'_y(x,y) = 2x + 8y - 2.$

(c) $f''_{x^2}(x,y) = 2. \qquad f''_{y^2} = 8 \qquad f''_{yx} = 2 = f''_{xy}$ car Schwarz s'applique.

(d). $D^2f = \begin{pmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Pour déterminer si f est convexe ou concave sur $\mathbb{R}^2$, il faut calculer les valeurs propres de D^2f (~~forme~~ nature de la forme f).

Or, $\sum \lambda_i = \text{Trace } D^2f = 2+8 = 10$ et $\prod \lambda_i = \det D^2f = 2\times 8 - 2\times 2 = 12$. Le produit des val. propres $= 12 > 0 \Rightarrow$ les v.p sont de même signe. Leur somme est aussi positive $\Rightarrow$ les v.p de D^2f sont > 0.

$D^2 f$ est définie positive pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 4

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

(a). On demande de déterminer les extrema de $f \Leftrightarrow$ c'est équivalent à un problème d'optimisation sans contrainte (optimisation libre).

1. D_f ?

On veut que les termes au dénominateur ne s'annulent pas.

$1+x^2 \geq 1$. et $1+y^2 \geq 1$. Le dénominateur ne s'annule jamais.

$D_f = \mathbb{R}^2$.

2. Points candidats ?

Pour trouver les points candidats, il faut annuler toutes les dérivées premières partielles.

$f'_x = 0$ et $f'_y = 0$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(1+x^2).(1+y^2) - 2x^2y(1+y^2)}{(1+x^2)^2.(1+y^2)^2} = \frac{y - x^2y}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} = \frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(1+y^2)(1+x^2) - 2y^2x(1+x^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}.$$

Remarque : f est symétrique en x et y $(f(x,y) = f(y,x)) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

On peut en calculer une sur deux, mais si on se trompe, on perd tous les points aux examens....

$$f'_y = 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} = 0 \Rightarrow x.(1-y^2) = 0$$

$x = 0$ ou $1 - y^2 = 0$

$y = \pm 1$.

$f'_x = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $x = \pm 1$.

Les points candidats vérifient donc $\underbrace{x=0, y=\pm 1}_{1^{ère}\text{ condition}}$, et $\underbrace{y=0, x=\pm 1}_{2^{nd}\text{ condition}}$.

Pour trouver les points candidats, il faut combiner des éléments de la 1ère condition et de la 2nd condition (certains ne sont pas possibles ...).

Les combinaisons (pts candidats) sont

$$\left.\begin{array}{ll} x=0,\ y=0 & - 1\text{ pt} \\ x=1,\ y=\pm 1 & - 2\text{ pt} \\ x=-1,\ y=\pm 1. & - 2\text{ pt} \end{array}\right\} 5 \text{ pts candidats.}$$

Les 5 points candidats sont : $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. 7

Ces 5 points $\in D_f = \mathbb{R}^2$, donc c'est OK.

3. Nature des points candidats

Nous allons déterminer si ces points sont des minima/maxima locaux/globaux. Pour cela, nous ~~allo~~ calculons les dérivées secondes partielles pour monter la matrice hessienne $D^2 f$.

$$f''_{x^2} = \frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 4x \cdot (1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$= \frac{2xy}{1+y^2} \cdot \frac{x^2-3}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''_{y^2} = \frac{2xy}{1+x^2} \cdot \frac{y^2-3}{(1+y^2)^3} \text{ (par symétrie).}$$

$$f''_{yx} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+y^2-2y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$ + Théorème de Schwarz, on sait que $f''_{yx} = f''_{xy}$.

La matrice hessienne correspondante est $D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{2xy(x^2-3)}{(1+y^2)(1+x^2)^3} & \frac{(1+x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \\ \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} & \frac{2xy}{(1+x^2)} \cdot \frac{(y^2-3)}{(1+y^2)^3} \end{pmatrix}$

$D^2 f$ dépend de x et y $\Rightarrow$ on ne pourra déterminer la nature des points candidats uniquement de manière locale.

i) Pt $(0,0)$.

$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: Nous utilisons les propriétés des v.p de cette matrice.

- $\Sigma \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ les valeurs propres sont de signe opposé. $D^2 f(0,0)$ est non-définie, $(0,0)$ est un pt selle.
- $\Pi \lambda = \lambda_1 \lambda_2 = \det(D^2 f(0,0)) = -1$. Même résultat qu'avant.

ii) Pt $(1,1)$.

$D^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$. C'est une matrice diagonale, les valeurs propres sont $-1/4, -1/4$. Les 2 valeurs propres sont $< 0 \Rightarrow D^2 f$ est définie négative.

$\Rightarrow f$ est localement concave en $(1,1)$.

$(1,1)$ est donc un maximum local. $f(1,1) = 1/4$.

(iii) Pt $(-1,-1)$.

$D^2f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$. Comme précédemment, c'est un <u>maximum local</u>. $f(-1,-1) = 1/4$.

(iv). Pt $(1,-1)$.

$D^2f(1,-1) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. $1/4$, $1/4$ sont valeurs propres $> 0 \Rightarrow D^2f(1,-1)$ est définie positive. f est localement convexe. C'est un <u>minimum local</u> en $(1,-1)$.
$f(1,-1) = -1/4$.

(v) Pt $(-1,1)$.

$D^2f_{(-1,1)} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. Même conclusion que précédemment, c'est <u>minimum local</u>.

(b) Les maxima ou minima obtenus sont des extrema locaux, mais ces extrema locaux peuvent aussi être globaux. Pour cela, il faut que le point M considéré soit de telle sorte que $f(M) > f(x,y)$ quels que soient $(x,y)/\{M\}$ si M est un maximum global (et inversement si M est un minimum global.).

$f(1,1) = f(-1,-1) = 1/4$ sont des maxima globaux si
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \leq 1/4$.

$f(1,-1) = f(-1,1) = -1/4$ sont des minima globaux si
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq -1/4$.

Ex 7 : Optimisations sous contraintes.

$f(x,y,z) = z$.

(a) $\begin{cases} x^2 = 2-y^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2-2 = 0 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$ On écrit les contraintes sous la forme $g_1(x,y,z)=0$ et $g_2(x,y,z)=0$.

f est une fonction de 3 variables soumise à 2 contraintes g_1 et g_2.

1. D_f ?

Pas de condition particulière ici. $D_f = \mathbb{R}^3$.

2. "Simplification" sous contraintes

On trouve toutes les contraintes où l'on peut écrire une variable en fonction des autres.

Dans le problème ici, $f(x,y,z) = z$. Nous chercherons donc à exprimer une des contraintes sous la forme z = fonction de (x,y).

Avec g_2, nous avons $z = -x-y$.

Il est essentiel que la contrainte puisse se ré-écrire de manière explicite d'une des variable en fonction des autres

ex : $z = -x-y \Rightarrow z$ est exprimé explicitement en fonction de x et y.

Si $g_3(x,y,z) = 0$ avec $g_3(x,y,z) = z^2+x+y = 0$

$z^2 = -x-y \Rightarrow$ ce n'est pas explicite !!!

Donc, $f(x,y,z) = z = -x-y = \hat{f}(x,y)$. Nous passons d'une fonction f à 3 variables avec 2 contraintes à une fonction f à 2 variables avec une contrainte.

$$\begin{cases} f(x,y,z) = z \\ x^2 = 2-y^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{f}(x,y) = -x-y \\ x^2+y^2+2 = 0 \end{cases}$$

3. Qualification de la contrainte

$g_1(x,y) = x^2+y^2-2 \quad g'_{1x} = 2x. \quad g'_{1y} = 2y.$

Matrice jacobienne $J_{g_1} = (2x \ \ 2y)$. J_{g_1} est de rang 1 (sauf si $x=y=0$, mais $(0,0)$ n'est pas admissible car ce point ne vérifie pas la contrainte g_1). La contrainte est qualifiée partout car le rang de J_{g_1} est maximal.

4. Lagrangien + points candidats (Condition nécessaire du 1er ordre).

$L(x,y,\lambda) = \hat{f}(x,y) - \lambda \hat{g}_1(x,y) = -x-y-\lambda(x^2+y^2-2)$

1 seul λ car 1 seule contrainte.

(10)

$L'_x = -1 - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2x}$ ($x \neq 0$ car sinon l'Éq n'est pas vérifiée).

$L'_y = -1 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2y}$ (idem pour $y \neq 0$).

$L'_\lambda = g_1(x,y) = 0 \Rightarrow x^2+y^2-2 = 0$

$$\begin{cases} \lambda = -1/2x \\ -1/2x = -1/2y \Rightarrow x = y \\ 2x^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1/2x \\ x = y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = -1/2 \end{cases} \\ \text{et} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ \lambda = 1/2 \end{cases} \end{array} \right.$$

– 2 cas pour λ :
Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, $(1,1)$ est point candidat.
Si $\lambda = \frac{1}{2}$, $(-1,-1)$ est pt candidat.

5. Nature des pts candidats (Condition suffisante du 2nd ordre).

$L''_{x^2} = -2\lambda \quad L''_{y^2} = -2\lambda \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0$ (avec le théorème de Schwarz).

$D^2L_\lambda(x,y) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$. La nature de cette matrice hessienne dépend de λ.

- $\lambda = -1/2$.
  $D^2L_{\lambda=-1/2}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est définie positive $\forall (x,y)$. Tous les points associés à $\lambda = -\frac{1}{2}$ sont des minima globaux. $(1,1)$ est un minimum global.

- $\lambda = +1/2$.
  $D^2L_{\lambda=1/2}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $D^2\cancel{f}$ est définie négative. Tous les pts sont des maxima globaux dont $(-1,-1)$.

– Bilan : $(1,1)$ est un minimum global pour $\hat{f}$
$(-1,-1)$ est un maximum global pour $\hat{f}$.

6. Retour au problème initial

Nous cherchons maintenant à trouver les extrema de f (et non pas de $\hat{f}$...). On va ré-utiliser la contrainte qui a été laissée de côté $g_2(x,y,z) = x+y+z = 0. \Rightarrow z = -x-y$.

Pour le minimum de $\hat{f}$, $(1,1)$, $z = -2 \Rightarrow (1,1,-2)$ est le point qui constitue le minimum global de f. La valeur de f en $(1,1,-2)$ est $f(1,1,-2) = -2$.

Pour $(-1,-1)$, le maximum global de $\hat{f}$, $z = 2$. $\Rightarrow (-1,-1,2)$ est le maximum global de f.

$$f(-1,-1,2) = 2.$$

$f(x,y,z) = z$ admet :
$(1,1,-2)$ en minimum global valant -2 sous les contraintes g_1 et g_2.
$(-1,-1,2)$ en maximum global valant $+2$ sous les contraintes g_1, g_2.

b) $f(x,y,z) = z$

contraintes $\begin{cases} x^2 = -y^2 + 2 \\ x+y+z = 0 \\ x+z = 1. \end{cases}$ Les 2 contraintes explicites donnent : $\left.\begin{matrix} x+y+z = 0 \\ x+z = 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x+z = 1 \end{cases}$

On remplace $y = -1$ dans la première contrainte : $x^2 = 2-1 = 1$.
$\Leftrightarrow x = \pm 1$.

Les 3 contraintes sont équivalentes à $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1-1 = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1-(-1) = 2 \end{cases}$

Dans $\mathbb{R}^3$, les seuls points qui respectent les 3 contraintes sont $(1,-1,0)$ et $(-1,-1,2)$. On doit maintenant déterminer le max et le min de tous les points qui vérifient les 3 contraintes, c'est à dire les seuls 2 pts $(1,-1,0)$ et $(-1,-1,2)$ ici $\Rightarrow$ Il faut chercher le min et max entre $(1,-1,0)$ et $(-1,-1,2)$.
Comme $f(x,y,z) = z$, c'est facilement déductible.

- $(1,-1,0)$ est un minimum global pour f sous les 3 contraintes et $f(1,-1,0) = 0$
- $(-1,-1,2)$ est maximum global pour f sous les 3 contraintes et $f(-1,-1,2) = 2$.

<u>Remarque</u> :

- Dans la première partie, si on avait pas simplifié le problème avec la fonction $\hat{f}$ et éliminer une contrainte, la matrice J_{g_1} aurait été plus complexe et qualifier les contraintes auraient été plus difficile.

De même, le lagrangien ferait intervenir λ_1 et λ_2 pour g_1 et g_2. Le problème serait beaucoup plus long à résoudre.

- Pour la 2ème question, pour 3 éq à 3 inconnues, il faut anticiper le fait qu'il y aurait peu de points admissibles avec les contraintes imposées. Surtout ne pas se mettre à calculer avec un lagrangien fonction de 6 variables : $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \ldots$