Chapitre 9

Les équations de récurrence

9.1 Présentation générale

Définition *On appelle* ***équation de récurrence linéaire d'ordre k*** *dans* $\mathbb{R}$ *une équation de la forme suivante*

$a_0 X_{n+k} + a_1 X_{n+k-1} + ... + a_k X_n = h(n)$

où a_i *sont des réels* (a_0 *et* a_k *distincts de zéro) et où* $h(n)$ *est une suite de* $\mathbb{N}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$.

On appelle ***équation homogène*** *associée à l'équation précédente l'équation sans second membre soit :*

$a_0 X_{n+k} + a_1 X_{n+k-1} + ... + a_k X_n = 0$

Proposition *Soit* X_n^* *une solution particulière quelconque d'une équation de récurrence linéaire, alors toute suite solution de l'équation de récurrence peut s'écrire comme la somme de* X_n^* *et* Y_n *où* Y_n *est solution de l'équation homogène et réciproquement.*

Ainsi, on peut étudier une équation de récurrence linéaire en deux étapes :

(1) Rechercher toutes les solutions de l'équation homogène.

(2) Rechercher une solution particulière.

(3) Les solutions générales de l'équation de récurrence sont alors la somme des deux.

9.2 Equation homogène

On considère maintenant une équation homogène

$a_0 Y_{n+k} + a_1 Y_{n+k-1} + ... + a_k Y_n = 0$

avec $a_k \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

9.2.1 Résultats généraux

On sait que l'ensemble des suites est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel avec la loi interne de somme standard de suite et la loi externe de multiplication par un scalaire.

Proposition *Les solutions d'une équation homogène d'ordre k forment un sous-espace vectoriel de dimension k.*

(Explication)

Définition *On appelle équation caractéristique d'une équation homogène d'ordre k l'équation obtenue en remplaçant le terme de plus haut degré Y_{n+k} par λ^k, puis le terme inférieur par λ^{k-1} jusqu'au terme de plus petit degré (Y_n), qui est lui-même remplacé par 1. Ainsi :*
$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0$

Proposition *Soit λ_1 une solution réelle ou complexe de multiplicité α, alors :*
$\forall c_i \in \mathbb{R} : Y_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{\alpha} c_i.n^{i-1}\right).(\lambda_1)^n$ *est solution de l'équation homogène.*

Proposition *Soit $\lambda_1, ...\lambda_p$ les p racines de l'équation caractéristique chacune de multiplicité $\alpha_1, ..., \alpha_p$, alors toute solution de l'équation homogène s'écrit :*
$Y_n = \sum\limits_{i=1}^{p}\left(\sum\limits_{j=1}^{\alpha_i} c_{ij}.n^{j-1}\right).(\lambda_i)^n$

Proposition *Soit $z_1 = \rho e^{i\theta}$ une solution complexe, alors $\overline{z_1}$ est aussi solution de l'équation homogène. Le sous-espace vectoriel engendré par $(z_1)^n$ et $(z_1)^n$ est équivalent à celui engendré par $\rho^n \cos n\theta$ et $\rho^n \sin n\theta$.*

Exemple :

a) $X_{n+3} + X_{n+2} + X_{n+1} + X_n = 0$

b) $X_{n+3} - 6X_{n+2} = 6X_n - 11X_{n+1} + 2$

9.2.2 Equation homogène d'ordre 2

On va appliquer les résultats généraux à une équation homogène d'ordre 2. Soient a,b et c des réels, on considère l'équation suivante
$aX_{n+2} + bX_{n+1} + cX_n = 0$

Proposition

1. *Si* $b^2 - 4ac > 0$*, on a 2 racines réelles* λ_1 *et* λ_2*. Les solutions sont du type* $\alpha.\left(\lambda_1\right)^n + \beta.\left(\lambda_2\right)^n$
2. *Si* $b^2 - 4ac = 0$*, on a 1 racine double* λ_1*.*
   Les solutions sont du type $\left(\alpha.n + \beta\right).\left(\lambda_1\right)^n$
3. *Si* $b^2 - 4ac < 0$*, on a 2 racines complexes* $z_1 = \rho e^{i\theta}$ *et* $z_1 = \rho e^{-i\theta}$*.*
   Les solutions sont du type : $\rho^n.\left[\alpha.\cos\left(n\theta\right) + \beta.\sin\left(n\theta\right)\right]$

9.3 Recherche de solution particulière

On considère une équation de récurrence du type
$a_0 X_{n+k} + a_1 X_{n+k-1} + \ldots + a_k X_n = g\left(n\right) + h\left(n\right)$

Proposition *Soit* Y_n *une solution particulière de :* $a_0 Y_{n+k} + a_1 Y_{n+k-1} + \ldots + a_k Y_n = g\left(n\right)$
Soit Z_n *une solution particulière de :* $a_0 Z_{n+k} + a_1 Z_{n+k-1} + \ldots + a_k Z_n = h\left(n\right)$
Alors $X_n = Y_n + Z_n$ *est une solution particulière de l'équation complète.*

Ainsi, afin de trouver des solutions particulières, on peut séparer le second membre en morceaux dont on connaît la forme des solutions particulières.

9.3.1 Second membre polynômial

Proposition *On suppose que le second membre est un polynôme* $P\left(n\right)$ *de degré* p *alors :*
On cherche une solution particulière de la forme $n^\alpha.Q\left(n\right)$
où α *est la multiplicité de la racine* 1 *dans l'équation caractéristique.* ($\alpha = 0$ *si* 1 *n'est pas racine)*
et $Q\left(n\right)$ *est un polynôme à déterminer de degré* p*.*

Exercices
Résoudre les équations suivantes
$X_{n+3} + X_{n+2} + X_{n+1} + X_n = n + 2$
$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2$

9.3.2 Second membre exponentiel

Proposition *On suppose que le second membre est du type δ^n alors :*
On cherche une solution particulière de la forme $c.n^\alpha.\delta^n$
où α est la multiplicité de la racine δ dans l'équation caractéristique. ($\alpha = 0$ si δ n'est pas racine)
et c est une constante à déterminer.

Exercice :
$X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n = 2^n$

9.3.3 Second membre mixte

Proposition *Si le second membre contient divers morceaux connus (type polynômial et exponentiel par exemple) :*
On cherche une solution particulière pour chacun des morceaux, la solution particulière de l'équation est alors la somme des solutions particulières des morceaux.

Exemple :
$X_{n+2} + 2X_{n+1} + 2X_n = 3^n + n$

9.4 Résolution complète

On peut totalement caractériser une solution d'une équation de récurrence d'ordre n si on connaît la valeur exacte des n premiers termes. On procède alors à une identification pour chacun des termes des coefficients variables obtenus pour la solution générale.
Exemple :
Résoudre cette équation : $X_{n+2} + 2X_{n+1} + X_n = 2^n$ sachant que $X_0 = 0$ et $X_1 = 1$

9.5 Comportement asymptotique de u_n

Dans des modèles d'évolution, on peut s'intéresser au comportement asymptotique (quand n tend vers l'infini) des solutions.
On suppose qu'il n'y a pas de second membre.
De façon générale, les solutions de l'équation homogène sont du type $\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} c_{ij}.n^{i-1}\right).(\lambda_i)^n$

De plus, on sait que la limite d'un terme $(\lambda_i)^n$ l'emporte sur celle d'un polynôme en n. On voit donc immédiatement que, pour que la solution admette une limite en $+\infty$, il faut que $\forall i : |\lambda_i| < 1$.

Définition *On dit que la solution d'une équation homogène constitue un* ***équilibre stable*** *si toutes les racines de l'équation caractéristique sont de module inférieur à 1.*

Dans le cas contraire, on dit que la solution constitue un équilibre ***instable****.*

On voit, par contre, que la stabilité d'une solution générale avec des conditions particulières dépend du type du second membre ainsi que des conditions initiales.

Définition *On appelle* ***ensemble de stabilité*** *l'ensemble des conditions initiales tel que la solution constitue un équilibre stable.*

Définition *Lorsque la racine de module le plus élevé de l'équation homogène est réelle et négative, le mouvement de la solution est dit* ***oscillatoire****.*

On dit que le mouvement de la solution d'une équation de récurrence est ***sinusoïdal*** *si celle-ci ne comporte que des termes en cosinus ou en sinus.*

On dit que le mouvement est ***monotone*** *s'il ne comporte que des termes polynômiaux ou exponentiels (type λ^t avec λ réel positif).*

Certains mouvements peuvent être mixte et comporter des mouvements monotones et sinusoïdaux.

Exemple : oscillations amorties, entretenues, explosives...

9.5.1 Exemple

- Résoudre l'équation de récurrence suivante :
  $X_n = X_{n-1} + 6X_{n-2} + 8$. Sachant que $X_0 = 1$ et $X_1 = -1$.
  Étudier le comportement asymptotique et la nature du mouvement.
- Résoudre l'équation de récurrence suivante :
  $3X_n = 3X_{n-1} - X_{n-2} + 1 + n$. Sachant que $X_0 = 1$ et $X_1 = 1$.
  Étudier le comportement asymptotique et la nature du mouvement.

9.6 Système d'équation

On considère un système d'équation de récurrence linéaire

$$\begin{cases} X_{n+k} = f\left(X_{n+k-1}, ..., X_n, Y_{n+k-1}, ..., Y_n\right) + h\left(n\right) \\ Y_{n+k} = g\left(X_{n+k-1}, ..., X_n, Y_{n+k-1}, ..., Y_n\right) + k\left(n\right) \end{cases}$$

Où f et g sont linéaires.
On va étudier le cas où il n'y a qu'un seul retard

$$\begin{cases} X_{n+1} = a_{11}X_n + a_{12}Y_n + h(n) \\ Y_{n+1} = a_{21}X_n + a_{22}Y_n + k(n) \end{cases}$$

Alors le système peut se mettre sous forme vectorielle

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = A.U_n + \begin{pmatrix} h(n) \\ k(n) \end{pmatrix}$$

Où $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

9.6.1 Cas avec retard > 1

On peut toujours réécrire le système tel qu'il n'y ait qu'un seul retard.

Exemple :

$$\begin{cases} X_{n+2} = a_{11}X_{n+1} + b_{11}X_n + a_{12}Y_{n+1} + h(n) \\ Y_{n+2} = a_{21}X_{n+1} + b_{22}X_n + a_{22}Y_{n+1} + k(n) \end{cases}$$

Alors posons $Z_{n+1} = X_n$ on a $Z_{n+2} = X_{n+1}$, le système peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} X_{n+2} = a_{11}X_{n+1} + b_{11}Z_{n+1} + a_{12}Y_{n+1} + h(n) \\ Y_{n+2} = a_{21}X_{n+1} + b_{22}Z_{n+1} + a_{22}Y_{n+1} + k(n) \\ Z_{n+2} = X_{n+1} \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} X_{n+2} \\ Y_{n+2} \\ Z_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+2} = A.U_{n+1} + \begin{pmatrix} h(n) \\ k(n) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Où $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{22} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.6.2 Equation homogène

$$\begin{cases} X_{n+1} = a_{11}X_n + a_{12}Y_n \\ Y_{n+1} = a_{21}X_n + a_{22}Y_n \end{cases}$$

Ainsi, si $a_{12} \neq 0$, alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{a_{12}}X_{n+1} - \frac{a_{11}}{a_{12}}X_n = Y_n \\ Y_{n+1} = a_{21}X_n + a_{22}Y_n \end{cases}$$

Donc $Y_{n+1} = \frac{1}{a_{12}}X_{n+2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}X_{n+1}$

En substituant dans la seconde équation, on obtient :

$$\frac{1}{a_{12}}X_{n+2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}X_{n+1} = a_{21}X_n + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}X_{n+1} - \frac{a_{11}}{a_{12}}X_n\right)$$

Donc X_n vérifie une équation de récurrence linéaire d'ordre 2.

On peut alors résoudre X_n. Ensuite on peut en déduire Y_n grâce à la formule suivante : $Y_n = \frac{1}{a_{12}} X_{n+1} - \frac{a_{11}}{a_{12}} X_n$.

Résolution matricielle

L'équation homogène correspond à l'équation générale sans second membre.
$U_{n+1} = A.U_n$

Proposition *La solution de l'équation homogène est de la forme :*
$U_n = A^n.U_0$

Il faut donc calculer A^n et, par conséquent, diagonaliser la matrice.

Remarque :
Cette méthode ne fonctionne que si la matrice est effectivement diagonalisable et à valeur propre réelle.
Sinon, il existe d'autres méthodes que nous ne verrons pas dans ce cours.

Autre façon de présenter le résultat
Si A est diagonalisable $A = P.D.P^{-1}$
Donc, on trouve $U_n = P.D^n.P^{-1}U_0$

Si on range les termes $P^{-1}U_0$ ensemble en un vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ qui dépend des conditions particulières U_0.

On obtient alors $U_n = a_1 (\lambda_1)^n V_1 + a_2 (\lambda_2)^n V_2 + ... + a_p (\lambda_p)^n V_p$
Où V_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
Les a_i se déterminent alors en fonction des conditions initiales.

Exemple :
$$\begin{cases} X_{n+1} = 4X_n + 4Y_n \\ Y_{n+1} = X_n + 4Y_n \end{cases}$$

9.6.3 Stabilité de l'équilibre

Définition *Un **équilibre** du système est un point vérifiant $X_{n+k} = ... = X_n$ et $Y_{n+k} = ... = Y_n$.*

On définie la stabilité de l'équilibre de l'équation homogène par rapport à la convergence ou non des solutions quand n tend vers l'infini.

Proposition *L'équilibre sera stable si les valeurs propres associées sont de module inférieur à 1.*

Un système qui n'est pas stable peut bien sûr le devenir pour certaines conditions particulières précises. On peut alors définir dans ce cas aussi l'ensemble de stabilité du système.

9.6.4 Solution particulière

On n'étudiera dans ce cours que les cas où B est un vecteur constant.

Proposition *Si B est un vecteur constant, alors la solution particulière est* $(I_d - A)^{-1}.B$

(Preuve...)

On peut remarquer que cette solution n'est valide que si $(I_d - A)$ est une matrice inversible. Ainsi, la solution particulière n'est plus un vecteur constant lorsque 1 est valeur propre de la matrice A.

Proposition *La somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière est solution de l'équation générale.*

(Preuve...)

9.7 Diagramme de phase

Dessin...

Exemple :

a) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \frac{2}{3}Y_n + 2 \\ Y_{n+1} = \frac{1}{3}X_n + \frac{2}{3}Y_n + 1 \end{cases}$$

b) Quel est l'équilibre du système complet ?

c) L'équilibre du systeme homogène est-il stable ou instable ?

d) L'équilibre du système complet est-il stable ou instable ?

e) Tracer le diagramme de phase.

9.8 Marche aléatoire, processus de Markov

9.8.1 Définitions

Une marche aléatoire est un processus dynamique dans le temps. On considère dans ce chapitre un temps discret qui prend donc des valeurs entières correspondant à des minutes, des mois, ou des années. Pour chaque jour, différents états du système sont possibles.

Ainsi, par exemple, la bourse peut être en forte hausse, en hausse modérée, neutre, en baisse modérée, en baisse forte etc...

En revanche le système ne peut être que dans un seul état à chaque période (il faut donc bien définir les états pour éviter tout chevauchement).

Définition *Un processus est dit stochastique s'il existe une règle régissant la probabilité d'être dans l'état S_i au temps n en fonction des probabilités d'être dans les divers états aux périodes précédentes.*

Définition *Un processus de Markov est un processus stochastique particulier pour lequel la probabilité d'être dans l'état S_i ne dépend que des probabilités concernant l'état du système à la période précédente.*

On dit de plus que le processus de Markov est **homogène** *si les probabilités de transition d'une période à l'autre sont indépendantes de n.*

Ainsi pour définir un processus de Markov il suffit de connaître :

1) Les probabilités $x_i(n)$ que l'état S_i survienne à la période n ou alternativement la proportion de la population qui est dans l'état S_i à la période n.

2) Les probabilités de transition t_{ij} où t_{ij} indique la probabilité que le processus soit dans l'état S_i à la période $n+1$ s'il est dans l'état j au temps n.

Fondamentalement, il est clair qu'un processus de Markov homogène n'est en fait qu'un système d'équation de récurrence linéaire d'ordre 1. La matrice de ce système est appelée matrice de transition ou matrice stochastique.

$T = (t_{ij})$.

Comme les t_{ij} correspondent à des probabilités, ils doivent être compris entre 0 et 1.

De plus, la somme sur chaque colonne de cette matrice doit être égale à 1 car chaque etat au temps n se disperse sur les etats au temps $n+1$ selon une loi de probabilité.

Définition *On appelle* **matrice de Markov** *toute matrice à coefficients positifs ou nuls dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à* 1.

NOTE :

D'après cette définition, un processus homogène de Markov est un système de récurrence linéaire dont la transposée de la matrice du système est une matrice de Markov. Il faut remarquer que, dans ce cours, on présente une chaîne de Markov comme un système du type $U_{n+1} = M.U_n$ où U_n est le vecteur colonne de probabilité et où la transposée de M est une matrice de Markov. Mais, généralement, la convention est d'écrire le système sous la forme $U_{n+1} = U_n.M$ où, cette fois, U_n est une vecteur ligne et où M est une matrice de Markov. J'ai préféré choisir la première notation plus proche du cours précédent sur les équations de récurrence linéaire. Pour ne pas se tromper de notation, il suffit de regarder si la matrice de transition est telle que la somme des éléments des lignes donne 1 ou si c'est la somme des éléments des colonnes qui donne 1.

Définition *M est dite* ***matrice de Markov régulière*** *si et seulement s'il existe un entier r tel que M^r soit une matrice à coefficients strictement positifs.*

M est dite ***matrice positive*** *si et seulement si tous les coefficients de la matrice sont strictement positifs.*

Remarque :
Une matrice de markov positive est une matrice de Markov régulière.

9.8.2 Propriétés des processus markoviens

Proposition *Soit ${}^tM$ une matrice de Markov régulière alors :*

a) 1 est une valeur propre de M de multiplicité 1.

b) Toute autre valeur propre r de M vérifie $|r| < 1$.

c) Le vecteur propre V associé à la valeur propre 1 peut être choisi tel qu'il ait des composantes strictement positives.

d) Soit W le vecteur V divisé par la somme de ses composantes, alors W est un vecteur de probabilité et il correspond à la solution asymptotique du système, soit $\lim\limits_{n \to \infty} X(n) = W$ (en proportion).

9.9 Exercices

Exemple 1 : (Un marché très flexible)
On considère le modèle de chômage suivant : la population active est divisée en deux sous-populations les sans-emploi et les autres. Soit x_n et y_n les proportions avec et sans emploi.

On considère que parmi les employés de la période n, 20% d'entre eux perdent leur emploi à la période $n+1$. D'autre part, parmi les sans-emploi, 30% trouvent un emploi à la période suivante.

a) Écrire le système sous forme matricielle.
b) S'agit-il d'un processus de Markov ? (Justifier)
c) Que peut-on dire de plus sur la matrice du système ?
d) Résoudre le système.
e) Vers quoi tend le système sur le long terme ?

Exemple 2 :
On considère le modèle suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,5x_n + 0,2y_n + 0,3z_n \\ y_{n+1} = 0,3x_n + 0,8y_n + 0,3z_n \\ z_{n+1} = 0,2x_n + 0,4z_n \end{cases}$$

a) Écrire le système sous forme matricielle.

b) S'agit-il d'un processus de Markov ?
c) Que peut-on dire de plus sur la matrice du système ?
d) Résoudre le système.
e) Vers quoi tend le système sur le long terme ?