Chapitre 8

Les Suites

8.1 Généralités, Rappels

On considère une suite u_n quelconque définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition *On dit que la suite est* **convergente** *ou qu'elle converge vers la limite l si et seulement si :*
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.

Définition *On dit qu'une suite u_n diverge vers $+\infty$ si et seulement si :*
$\forall \eta > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq N \Rightarrow u_n \geq \eta$

On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
On a une définition équivalente lorsque la suite diverge vers $-\infty$.

Remarque :
Une suite qui diverge ne diverge pas forcément vers $+$ ou $-\infty$.

Exemple :
$(-1)^n$

Proposition (Critère de convergence vers 0)
Soit u_n une suite positive,
Si, à partir d'un certain rang p, il existe s tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq s < 1$, alors la suite est convergente vers 0.

Preuve...

Attention : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ne permet pas à lui seul de conclure. Comme le montre l'exemple $u_n = 1 + 1/n$.

Exercice

Étudiez la convergence de la suite $u_n = \frac{2^n}{n!}$.

La propriété précédente peut être modifiée pour obtenir une convergence vers l puisque u_n converge vers l est équivalent à $u_n - l$ converge vers 0.

Proposition (Critère de divergence)
Soit u_n une suite positive,
Si, à partir d'un certain rang p, il existe s tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > s > 1$ alors la suite est divergente vers $+\infty$.

Exercice :

Étudiez la convergence de la suite $u_n = \frac{n^n}{n!}$

Définition *On appelle suite extraite de u_n une suite définie par une injection Φ croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à $n \in \mathbb{N}$ associe le terme $u_{\Phi(n)}$.*

Proposition *Soit u_n une suite qui converge vers l, alors toute suite extraite converge vers l.*

Cette proposition ne se transpose bien sûr pas pour des suites divergentes.

Exercices

1) Soit u_n une suite, montrez que si u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers la même limite, alors il en est de même pour u_n.
2) Soit u_n une suite, montrez que si u_{2n}, u_{2n+1} et u_{3n} convergent alors u_n converge.

Définition *On dit qu'une suite est une* **suite de Cauchy** *si et seulement si :*
$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ *un entier tel que :*
$i, j \geq N \Rightarrow |u_i - u_j| \leq \epsilon$

Propriétés

Toute suite convergente est une suite de Cauchy et réciproquement (dans un espace complet...).

Exercice

Montrez qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

Définition

> *Une suite est* ***croissante*** *ssi :* $u_{n+1} - u_n \geq 0$
> *Une suite est* ***décroissante*** *ssi :* $u_{n+1} - u_n \leq 0$
> *Une suite est* ***monotone*** *ssi elle est croissante ou décroissante.*
> *On dit qu'une suite est* ***majorée*** *(resp.* ***minorée****) s'il existe* M *tel que* $u_n \leq M$ *(resp.* $u_n \geq M$*).*

Proposition *Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente.*

Définition *Deux suites* u_n *et* v_n *sont dites* ***adjacentes*** *si l'une croît et l'autre décroît avec* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

On peut remarquer que deux suites adjacentes ont la même limite.

Exercice
Étudiez la suite $u_n = \frac{n+2}{n+1}$
On montrera la convergence avec la définition utilisant les ϵ.

8.2 Suite récurrente

On s'intéresse maintenant aux suites définies par une formule de récurrence d'ordre 1.

On a donc : $u_{n+1} = f(u_n)$.

On supposera dans ce chapitre que f est au moins continue sur son ensemble de définition.

Proposition *Si* f *est croissante, alors* u_n *est monotone.*
Si f *est décroissante, alors* u_{2n} *et* u_{2n+1} *sont des suites extraites monotones.*

(à prouver)

Définition *On appelle* ***point fixe*** *de* f *un point* l *tel que* $f(l) = l$.

Proposition *Toute suite récurrente convergente converge vers un point fixe.*

Proposition *Un point fixe* $l \in \mathbb{R}$ *est stable si* $|f'(l)| < 1$*, il est instable si* $|f'(l)| > 1$.

Définition *On appelle ensemble de stabilité d'une suite l'ensemble des points initiaux* u_0 *ou* u_1 *tel que la suite converge.*

Proposition (Théorème de convergence)
Soit I un intervalle fermé tel que $f(I) \subset I \subset D_f$ et si, de plus, f est dérivable sur I avec $\forall x \in I : |f'(x)| \leq k < 1$, alors u_n converge vers l'unique point fixe de I.

8.3 Méthode d'étude des suites récurrentes

1. Trouvez les points fixes.
   S'il n'y en a pas, alors la suite diverge-t-elle en $+\infty$ ou $-\infty$ ou ni l'un ni l'autre ?
2. Étudiez la fonction f. Est-elle croissante décroissante sur des intervalles ?
3. En déduire la monotonie ou non de u_n
   Si f est décroissante, regardez $f \circ f$ et étudiez u_{2n} et u_{2n+1}
4. Trouvez des majorants ou des minorants sur les intervalles. Les points fixes sont souvent des majorants ou des minorants.
5. Ou recherchez des intervalles stables pour u_n afin d'appliquer le théorème de convergence.
6. Faites la représentation graphique si nécessaire.

8.4 Compléments

8.4.1 Suite arithmétique

Définition *On appelle suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 la suite définie par l'équation de récurrence suivante : $u_{n+1} = u_n + r$.*

Proposition *Soit u_n une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors : $u_n = u_0 + n * r$*

8.4.2 Suite géométrique

Définition *On appelle suite géométrique de raison r et de premier terme u_0 la suite définie par l'équation de récurrence suivante : $u_{n+1} = r * u_n$.*

Proposition *Soit u_n une suite géométrique de raison r et de premier terme u_0, alors : $u_n = r^n * u_0$*

8.4.3 Représentation graphique

Lorsqu'une suite est définie par une formule récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut représenter la suite en utilisant le graphe de la fonction f.

Les éléments de la suite apparaissent sur l'axe des abscises.

Partant du premier terme u_0 on sait que $u_1 = f(u_0)$; donc la valeur de u_1 correspond à l'ordonnée du graphe de f en prenant $x = u_0$.

Pour reporter cette ordonnée sur l'axe des abscisses, il suffit alors d'utiliser la première bissectrice (la droite $y = x$).

Une fois que u_1 a été reporté sur l'axe des abscisses, on peut facilement recommencer le même processus pour trouver u_2 puis u_3 etc...

8.4.4 Applications

Exercice 1

Soit la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n+1}{u_n+2}$

A) On étudie la suite u_n avec $u_0 > 0$

1)Montrez que la suite est monotone.

2)Déterminez les points fixes.

3)Montrez que la suite converge.

4)Montrez le même résultat en utilisant des intervalles stables bien choisis.

B) Montrez que la suite converge si $u_0 > -2$

Exercice 2

Soit la suite définie par $u_{n+1} = \frac{4u_n+3}{2u_n}$ avec $u_0 = 5$. On définit $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

a) Montrez que $v_{n+1} = f\left(f\left(v_n\right)\right)$ et $w_{n+1} = f\left(f\left(w_n\right)\right)$

b) Montrez par récurrence que $w_n < v_n$

c) En déduire que v_n et w_n convergent.

d) En déduire que u_n converge.

e) Montrez que si $u_0 \in \left]\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right[$ alors u_n converge.

f) Montrez que le point de convergence constitue un équilibre stable.