

Corrections Thème 5 : Complexes.

(1)

Généralités sur les complexes : le minimum vital ...

- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Particularité de $\mathbb{C}$: contient un nombre i tel que $i^2 = -1$ ou encore $\sqrt{-1} = i$ (lettre grec $iota$). Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $a+ib$ (forme cartésienne) ou $\rho e^{i\theta}$ (forme polaire) avec:

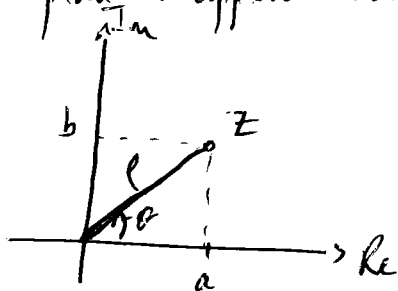
a = partie réelle = $\text{Re}(z)$

b = partie imaginaire = $\text{Im}(z)$

ρ = module de z = $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

θ = argument de z = $\arg(z)$. avec $\tan \theta = \frac{b}{a}$

- Imaginez un nombre complexe comme un couple (a, b) ou (ρ, θ) que l'on peut représenter sur un plan de $\mathbb{R}^2$ muni d'un ensemble d'opérations. Le plan s'appelle un diagramme d'Argand.



- Par construction, un nombre réel sera représenté sur l'axe des abscisses uniquement avec un argument de 0.

- Un imaginaire pur (ex: $5i$) sera sur l'axe des ordonnées avec un module = b et argument = $\frac{\pi}{2}$.

- En particulier, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

- Conjugué de $z = \bar{z} = a - ib$.
 $z\bar{z} = |z|^2$.

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, avec la formule de Moivre:

$$\begin{aligned}(e^{i\theta})^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= e^{in\theta} \\ &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).\end{aligned}$$

- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$.

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

(2)

Ex 1

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= (3+i)(5-2i) = 3 \times 5 + 3 \times (-2i) + i \times 5 + i \times (-2i) \\
 &= 15 - 6i + 5i - 2i^2 \\
 &\quad -2 \times -1 = 2 \\
 &= 17 - i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= (4-7i)^3 = (4-7i)(4-7i)^2 \\
 &= (4-7i)(4^2 - 2(4)(+7i) + (-7i)^2) \\
 &= (4-7i)(16 + \cancel{56i} + 49i^2) \quad 49 \times -1 = -49 \\
 &= (4-7i)(-33 - 56i) \\
 &= 4 \times (-33) + 4 \times (-56i) + (-7i)(-33) + (-7i) \times (-56i) \\
 &= -132 - 224i + 231i + 392i^2 \\
 &= -524 + 7i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_3 &= it^2 - 3t + 4 - 2i \quad t = x + iy \\
 &\quad t^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 \\
 &\quad = (x^2 - y^2) + 2xyi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow Z_3 &= i(x^2 - y^2 + 2xyi) - 3(x^2 - y^2 + 2xyi) + 4 - 2i \\
 &= (4 - 3x - 2xy) + (x^2 - y^2 - 3y - 2)i
 \end{aligned}$$

Ex 2

Quand vous avez une fraction de la forme $\frac{Z_1}{Z_2}$ avec $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$, pour faire "disparaître" la partie imaginaire du dénominateur, il faut multiplier la fraction par $\frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2}$ et calculer....

$$\begin{aligned}
 Z_4 &= \frac{6-7i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(6-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6-6i-7i+7i^2}{\underbrace{(1^2 - i^2)}_{= 1 - (-1) = 2}} \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{13}{2}i
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(Z_4) = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{Im}(Z_4) = -\frac{13}{2}$$

$$Z_5 = \frac{3-i}{2i-5} \times \frac{-2i-5}{-2i-5} = \frac{-15 - 6i + 5i + 2i^2}{(-5)^2 - (2i)^2} = \frac{-17-i}{29}$$

$$\operatorname{Re}(Z_5) = -\frac{17}{29} \quad \operatorname{Im}(Z_5) = -\frac{1}{29}$$

Ex 3.

(a). $(1+2i)t = 3t - 5i + 2.$

$t + 2ti - 3t = 2 - 5i \Rightarrow$

$t(-2+2i) = \underline{2-5i}$

$t = \frac{2-5i}{-2+2i} \times \frac{-2-2i}{-2-2i}$

$t = \underline{-\frac{7}{4} + \frac{3}{4}i}$

(b) $t - (5+2i)\bar{t} = 2t - 5i.$

On pose $t = x+iy. \Rightarrow \bar{t} = x-iy.$

$x+iy - (5+2i)(x-iy) = 2(x+iy) - 5i$

$x+iy - (5x - 5yi + 2xi - 2yi^2) = 2x + 2yi - 5i.$

$x+iy - 5x + 5yi - 2xi - 2y = 2x + 2yi - 5i.$

$\underbrace{6x + 2y}_A = \underbrace{2xi - 4yi - 5i}_B.$

$\text{Re}(A) = 6x + 2y = \text{Re}(B) = 0. \quad - (1)$

$\text{Im}(A) = 0 = \text{Im}(B) = 2x - 4y - 5 \quad - (2)$

$\left. \begin{array}{l} 6x + 2y = 0 \quad - (1) \\ 2x - 4y = 5 \quad - (2) \end{array} \right\} \quad x = \frac{5}{14}, y = -\frac{15}{14}.$

$t = \underline{\frac{5}{14} - \frac{15}{14}i}$

Ex 4.

$Z_6 + Z_7 = -5 + 4i = S$

$Z_6 Z_7 = 3 - 11i = P$

2 racines sont solutions de l'équation du degré 2 :

$Z^2 - SZ + P = 0$ (vraie pour les réels aussi)

$\Rightarrow Z^2 - (-5+4i)Z + (3-11i) = 0$

Résolution en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5+4i)^2 - 4(3-11i) = 25 - 40i + 16i^2 - 12 + 44i = -3 + 4i$

Or, $Z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+4i \pm \sqrt{\Delta}}{2}$. Reste à calculer $\sqrt{\Delta}$.

- Méthode 1

On pose $(x+iy)^2 = \Delta \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i.$

Par identification $x^2 - y^2 = -3 \quad - (1)$

$2xy = 4. \quad - (2)$

De plus, on sait que $|\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |x + iy|^2$ ④
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = 5$ - ③

① + ③, $x^2 = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

② + ③, $y^2 = \frac{5-(-3)}{2} = 4 \Rightarrow y = \pm 2$.

Or, avec ②, $xy = 2 \Rightarrow x$ et y du même signe.

$\pm \sqrt{\Delta} = -1-2i$ et $1+2i$.

Méthode 2 : Bien connaître les relations trigonométriques

$|\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$.

$\tan \theta = -4/3$



Mais on peut calculer $\cos \theta = -3/5$ ou encore $\sin \theta = 4/5$.

$\Delta = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \rho^{1/2} e^{i\theta/2} = \sqrt{5} (\cos \theta/2 + i \sin \theta/2)$.

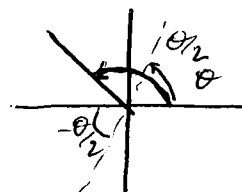
Identités trigonométriques utiles : $\begin{cases} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ = 2\cos^2 \theta - 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \cos \theta = 2\cos^2 \theta/2 - 1$

$\Rightarrow \cos^2 \theta/2 = \frac{-3/5 + 1}{2} = 1/5 \Rightarrow \cos \theta/2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin^2 \theta/2 = 1 - \cos^2 \theta/2 = 1 - 1/5 = 4/5$

$\Rightarrow \sin \theta/2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$



$\sqrt{\Delta} = \pm 1 \pm i2$. Sur la figure, les solutions possibles sont $-1-i2$ ou $1+2i$.

$\Rightarrow Z = \frac{-5+4i \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-5+4i \pm (1+2i)}{2}$

$Z = \{-2+3i, -3+i\}$.

Ex 5:

(5)

Méthode 1. $|Z| = \left| \frac{1}{\bar{Z}} \right| \Rightarrow |Z|^2 = 1. \quad (1)$

$$|Z| = |1-Z|. \quad (2)$$

On pose $Z = x+iy$.

De (1), on a $x^2 + y^2 = 1$.

(2), $x^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2$.

$$x^2 = x^2 - 2x + 1.$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$Z = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

Méthode 2

$$|Z| = \left| \frac{1}{\bar{Z}} \right| \Rightarrow |Z|^2 = 1.$$

$$\Rightarrow |Z| = 1. \Rightarrow Z = e^{i\theta} \text{ avec } \rho = 1.$$

D'autre part, $|Z| = \left| \frac{1}{\bar{Z}} \right| = |1-Z| \Rightarrow |1-Z| = 1.$

$$|e^{i0} - e^{i\theta}| = 1.$$

$$\Rightarrow |-e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})| = 1.$$

$$\text{Or } |e^{i\theta/2}| = 1. \Rightarrow |e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}| = 1.$$

$$\Rightarrow \left| 2i \sin \frac{\theta}{2} \right| = 1.$$

$$\left| \sin \frac{\theta}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \quad (\pm 2k\pi).$$

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } -\frac{5\pi}{6} \quad (\pm 2k\pi).$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } -\frac{5\pi}{3} \quad (\pm 2m\pi)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \quad (\pm 2m\pi)$$

$$m = k/2 \dots$$

$$\text{Or } \frac{5\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3} \text{ et } -\frac{5\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}.$$

$$\Rightarrow Z = \left\{ e^{i\pi/3}, e^{i5\pi/3} \right\}.$$

Ex 6.

6

$$Z_9 = ie^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

$$|Z_9| = 1.$$

$$\arg Z_9 = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\operatorname{Re}(Z_9) = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Im}(Z_9) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$Z_{10} = -e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ car } -1 = e^{-i\pi} \\ = e^{i(\pi - \frac{\pi}{4})} \\ = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \\ = -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$Z_{11} = 1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} e^{i \underbrace{\arctan(\sqrt{3}/1)}_{\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

ou

on remarque que $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$... et on sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ($\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$) ...

$$Z_{12} = [Z_{10}]^2 = (-e^{-i\frac{\pi}{4}})^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

$$|Z_{12}| = 1.$$

$$\arg Z_{12} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{Re}(Z_{12}) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(Z_{12}) = -1.$$

E₂ 7

⑦

Résolution des équations dans $\mathbb{C}$:

(a) $t^2 + 7 = 0$

$$t^2 = -7$$

$$\Rightarrow t = \pm \sqrt{-7} = \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} = \pm \sqrt{7} i \quad \text{en posant } i = \sqrt{-1}$$

(b). $3t^2 + t + 5 = 0$.

Calcul du discriminant $\Delta = 1^2 - 4(3)(5) = -59$.

$$\Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6}, \quad \frac{-1 - \sqrt{-59}}{6}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{-1 + \sqrt{59} i}{6} \quad t_2 = \frac{-1 - \sqrt{59} i}{6}}$$