

Statistiques appliquées à la gestion

Licence 2 gestion
2023/2024

R. ZAFRI

Maître de Conférences

raouf.zafri@univ-paris1.fr

Sommaire du cours

Chapitre 1 : Dénombrements et analyse combinatoire

Chapitre 2 : Introduction aux formalismes des probabilités

Chapitre 3 : Indépendances et probabilités conditionnelles

Chapitre 4 : Introduction aux variables aléatoires réelles

Chapitre 5 : Variables aléatoires discrètes usuelles

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles absolument continues

Chapitre 7 : Loi de probabilité

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles continues

2. La loi uniforme

3. La loi exponentielle

2. La loi uniforme

Introduction

- Imaginons que nous avons une règle de 5 centimètres de long et que l'on lance un petit caillou dessus, les yeux fermés, de manière à ce qu'il atterrisse quelque part sur la règle. La loi uniforme continue pourrait être utilisée pour décrire la probabilité que le caillou atterrisse à un certain point sur cette règle.
- Dans cet exemple, la "règle" représente l'intervalle $[0 ; 5]$ en centimètres. Si on suppose que le caillou a autant de chances d'atterrir à n'importe quel point sur la règle (c'est-à-dire que chaque point est "équitable" ou a la même probabilité), alors on dit que la position du caillou suit une loi uniforme continue sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
- Cela signifie que la probabilité que le caillou atterrisse entre 1 cm et 2 cm, par exemple, est la même que celle qu'il atterrisse entre 4 cm et 5 cm, car les deux intervalles ont la même longueur (1 cm). La probabilité est simplement proportionnelle à la longueur de l'intervalle sur lequel nous nous interrogeons, sans favoriser un endroit particulier sur la règle.
- En résumé : avec la loi uniforme continue, chaque point sur l'intervalle que l'on examine (dans ce cas, la règle de 5 cm) a exactement la même chance d'être choisi. C'est comme si la nature n'avait pas de favori ; elle traite tous les points de manière égale.

2. La loi uniforme

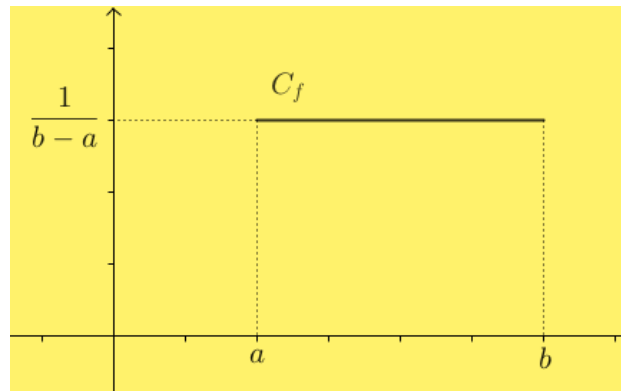
A. Loi uniforme sur $[a ; b]$

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

La **loi uniforme** sur $[a ; b]$, notée $U([a ; b])$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction constante f définie sur $[a ; b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}.$$



2. La loi uniforme

B. Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme $U([a ; b])$.

Alors, pour tout x de $[a ; b]$, on a :

$$P(a \leq X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Démonstration

$$P(a \leq X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} [t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

2. La loi uniforme

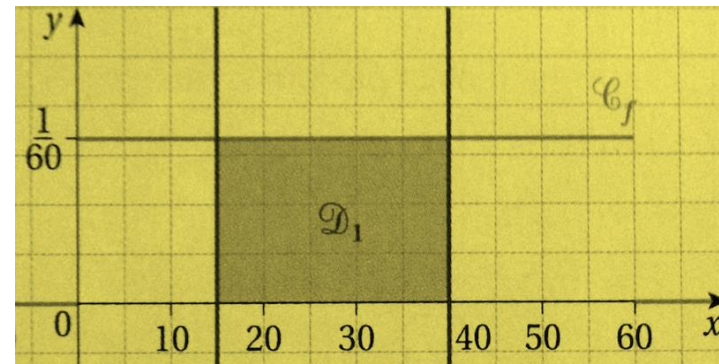
Loi uniforme sur $[a ; b]$

Suite à une anomalie technique, un client contacte le service après-vente de son opérateur. Un conseiller l'informe qu'un technicien le rappellera pour une intervention à distance entre 17h et 18h. Sachant que ce technicien appelle de manière aléatoire sur le créneau donné, on souhaite calculer la probabilité que le client patiente entre 15 et 40 minutes.

On désigne par T la variable aléatoire continue qui donne le temps d'attente en minutes.

- On a donc : $P(15 \leq T \leq 40) = \frac{40-15}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$
- La probabilité $P(15 \leq T \leq 40)$ est l'aire sous la courbe représentative de la fonction de densité et les droites d'équation $x = 15$ et $x = 40$.
- La fonction de densité est la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{60}$.

a) On retrouve ainsi : $P(15 \leq T \leq 40) = \frac{40-15}{60} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$.



2. La loi uniforme

C. Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme $U([a ; b])$.

Alors :

- $$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{t}{b-a} dt \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ V(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent, T suit la loi uniforme $U([0 ; 60])$. Ainsi : $E(T) = \frac{0+60}{2} = 30$.

Sur un grand nombre d'appels au service, un client peut espérer attendre 30 min.

2. La loi uniforme

Exercice d'application

La durée d'une communication de prospection téléphonique entre chargé d'affaire et son client ne dépasse jamais 1h.

On suppose que sa durée en heures est un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Le chargé d'affaire appelle son client au téléphone.

Déterminer la probabilité que la durée de communication soit :

- a) de 30 min
- b) d'au plus 3 quarts d'heure
- c) d'au moins 10 min
- d) comprise entre 20 min et 40 min.

2. La loi uniforme

Corrigé

On note X la variable aléatoire désignant la durée de la communication téléphonique entre le chargé d'affaires et son client. X suit la loi uniforme sur $I = [0 ; 1]$

La fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur $I = [0 ; 1]$ est : $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1$

$$a) P(X = 0,5) = \frac{0,5 - 0,5}{1} = 0$$

$$b) = P(0 \leq X \leq 0,75) = \frac{0,75 - 0}{1} = \frac{3}{4}$$

$$c) P(X \geq \frac{1}{6}) = P\left(\frac{1}{6} \leq X \leq 1\right) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{1} = \frac{5}{6}$$

$$d) P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

3. La loi exponentielle

Introduction

La loi exponentielle est une loi de probabilité qui décrit le temps d'attente jusqu'à l'occurrence d'un premier événement dans un processus de Poisson.

Pour rappel, un processus de Poisson est un modèle mathématique qui représente des événements se produisant de manière aléatoire dans le temps ou dans l'espace, à un taux constant en moyenne.

La caractéristique principale de la loi exponentielle est qu'elle est sans mémoire, ce qui signifie que la probabilité d'occurrence d'un événement dans le futur est indépendante du temps écoulé depuis le dernier événement.

3. La loi exponentielle

Introduction

La loi exponentielle est largement utilisée dans le domaine du management, notamment pour l'analyse des risques, la planification de projets, la gestion des stocks, et la maintenance prédictive. Voici quelques applications concrètes :

Analyse des risques et gestion de la fiabilité : La loi exponentielle est utilisée pour modéliser le temps entre les défaillances d'un système ou d'un composant. Cela permet aux managers de prédire la probabilité de défaillance dans un intervalle de temps donné, ce qui est utile pour la planification de la maintenance et la gestion des risques.

Maintenance prédictive : Dans la maintenance prédictive, la loi exponentielle est utilisée pour prédire le moment optimal pour effectuer la maintenance sur des équipements, en se basant sur le risque de défaillance dans le temps. Cela permet de réduire les coûts de maintenance en évitant à la fois les pannes coûteuses et la maintenance excessive.

Gestion de la durée de vie des produits : En utilisant la loi exponentielle pour modéliser la durée de vie attendue des produits, les entreprises peuvent mieux planifier les cycles de renouvellement des produits, la gestion des garanties, et les stratégies de mise à jour.

3. La loi exponentielle

A. Définition et propriétés

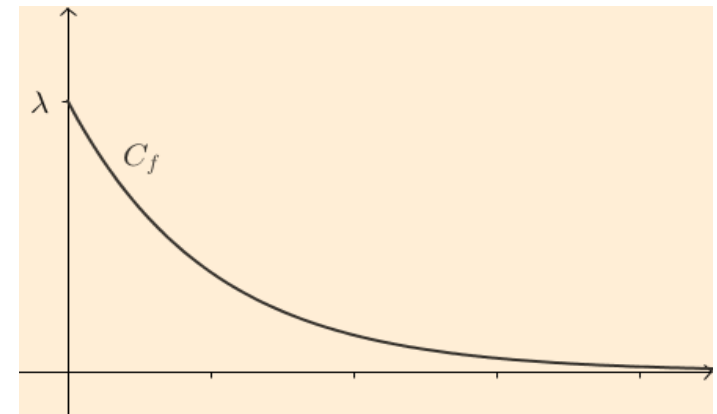
Soit λ un réel strictement positif.

La **loi exponentielle** de paramètre λ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

où:

- x est le temps d'attente jusqu'à l'occurrence de l'événement,
- λ est le taux d'occurrence des événements, un paramètre positif qui représente le nombre moyen d'événements par unité de temps,
- e est la base des logarithmes naturels.
- Cette formule montre que la probabilité de l'occurrence d'un événement diminue exponentiellement avec le temps d'attente x .



3. La loi exponentielle

B. Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ . Alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemple

Soit une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

Alors : $E(X) = \frac{1}{0,05} = 20$.

3. La loi exponentielle

C. Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Alors, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Prenons l'exemple d'une entreprise de télécommunications qui analyse la durabilité de ses équipements réseau. Supposons que le temps de fonctionnement jusqu'à la première panne d'un composant spécifique suive une loi exponentielle avec un taux de panne $\lambda=0.1$ par an. Cela signifie que, en moyenne, on s'attend à une panne tous les $1/\lambda = 10$ ans pour un composant donné.

La fonction de répartition $F(x)$ de la loi exponentielle est définie comme la probabilité que la variable aléatoire X (le temps jusqu'à la première panne, dans notre cas) soit inférieure ou égale à une valeur x , et elle est donnée par : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

Pour cet exemple, calculons la probabilité qu'un composant tombe en panne dans les 5 ans.

$F(5) = 1 - e^{-0,1 * 5} = 0.393$, ou 39.3%. Cela signifie que, pour un composant spécifique de l'entreprise de télécommunications, il y a une chance de 39.3% qu'il faille avant d'atteindre 5 ans d'utilisation. Cette mesure permet d'évaluer la fiabilité et planifier la maintenance ou le remplacement des équipements

3. La loi exponentielle

D. Calcul de probabilités

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Alors, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$P(X > a) = e^{-\lambda a}$$

3. La loi exponentielle

E. Propriété d'absence de mémoire

X : durée de vie d'un appareil sans vieillissement

L'appareil fonctionne encore après 3000 heures

Quelle est la probabilités qu'il fonctionne encore après 4000 heures ?

Alors on a : $P_{X \geq 3000}(X \geq 4000) = P(X \geq 1000)$.

Alors, pour tout réel t et h positifs, on a : $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ .

Alors, pour tout réel t et h positifs, on a : $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle est une caractéristique unique qui signifie que la probabilité future d'un événement est indépendante de l'histoire passée.

3. La loi exponentielle

E. Propriété d'absence de mémoire

Exemple

Imaginons que vous ayez une ampoule qui suit une loi exponentielle en termes de durée de vie, avec une durée de vie moyenne de 8 ans. Cela signifie que, peu importe combien de temps l'ampoule a déjà fonctionné, la probabilité qu'elle continue de fonctionner pour une durée supplémentaire est toujours la même.

Supposons que votre ampoule ait déjà fonctionné pendant 5 ans. Vous pourriez vous demander : quelle est la probabilité que cette ampoule fonctionne encore pendant 3 ans supplémentaires ? Grâce à la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle, cette probabilité est exactement la même que si l'ampoule était neuve et que vous vous demandiez si elle allait durer 3 ans. Si la probabilité qu'une ampoule neuve dure plus de 3 ans est, disons, 70%, alors la probabilité qu'une ampoule déjà en service depuis 5 ans dure encore au moins 3 ans est également de 70%.

3. La loi exponentielle

Exercice d'application

La durée de vie X en année, d'un appareil avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,3$

- 1) Quelle est la probabilité que l'appareil ne connaisse pas de panne au cours des trois premières années.
- 2) Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la deuxième année.
- 3) L'appareil n'a connu aucune panne les deux premières années.

Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante?

3. La loi exponentielle

Corrigé

1) Quelle est la probabilité que l'appareil ne connaisse pas de panne au cours des trois premières années ?

$$P(X > 3) = P(X \geq 3) = e^{-\lambda \cdot 3} = e^{-0,3 \times 3} = e^{-0,9}$$

2) Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la deuxième année ?

$$P(X < 2) = P(0 \leq X \leq 2) = e^{-0,3 \times 0} - e^{-0,3 \times 2} = e^0 - e^{0,6} = 1 - e^{0,6}$$

3) L'appareil n'a connu aucune panne les deux premières années.

Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante ?

$$P_{X>2}(X > 3) = P_{X \geq 2}(X \geq 3) = P(X \geq 1) = e^{-0,3 \times 1} = e^{-0,3}$$

3. La loi exponentielle

Exercice d'application

A un standard téléphonique, on entend « Votre temps d'attente est estimé à 5 minutes ».

Ce temps d'attente en minute, noté T , est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle et l'estimation annoncée correspond à l'espérance de T . Vous avez déjà attendu plus d'une minute.

Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes au total ?

3. La loi exponentielle

Corrigé

$$E(T) = 5$$

T suit une loi exponentielle dont $E(T) = \frac{1}{\lambda}$. $\frac{1}{\lambda} = 5$ donc $\lambda = \frac{1}{5} = 0,2$

Soit λ son paramètre

$$P_{X \geq 1}(X \geq 10)$$

Comme T est sans vieillissement :

$$\text{On a } P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h) \quad : \quad t = 1 ; h = 9$$

Donc on

$$P_{X \geq 1}(X \geq 10) = P(X \geq 9) = e^{-\lambda \cdot 9} = e^{-0,2 \times 9} = 0,17$$

3. La loi exponentielle

Exercice

La durée de vie, en année, d'une ampoule LED est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,2$.

Dix LED neuves, ont été mises en service en même temps.

Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de LED qui fonctionnent encore après 4 années.

- Calculer $P(X=7)$

3. La loi exponentielle

Exercice

T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,2$.

Calcul de la probabilité qu'une ampoule fonctionne encore après 4 ans

$$P(T \geq 4) = e^{-\lambda \cdot 4} = e^{-0,2 \times 4} = e^{-0,8}$$

On répète 10 fois la même expérience de manière indépendante à deux issues (fonctionne, ne fonctionne pas)

Ainsi, X suit une loi binomiale B (10 ; $e^{-0,8}$)

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \times (e^{-0,8})^7 \times (1 - e^{-0,8})^3 \approx 0,074$$