

Contrôle d'algèbre

Calculatrice, téléphone et matériels de cours/TD interdits
45 minutes

Mardi 19 octobre 2021

Exercice 1 : Question de cours (2 points)

Soit $\mathcal{M} =$

$$\begin{bmatrix} 5 & \pi & \pi \\ 0 & 5 & \pi \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Quelles sont les valeurs propres de $\mathcal{M}$ (sans calcul, mais justifiez)? Écrivez la décomposition de $\mathcal{M}$ sous la forme d'une matrice diagonale $\mathcal{D}$ (à expliciter) et d'une matrice de passage P (à ne pas calculer). Expliquez sans calcul pourquoi $\mathcal{M}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 : Système linéaire paramétré (5 points)

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant selon la valeur de m .

$$\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + 4my = -6 \end{cases}$$

Donnez une interprétation géométrique de vos résultats.

Exercice 3 : Application linéaire (10 points)

Soit $f(x, y, z) = (-2x - 4z, -3y, 2x + 3y + 4z)$.

- Justifiez que f est une application linéaire. Donnez les espaces de départ et d'arrivée.
- Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, exprimez les composantes de f en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$.
- Quelle est la matrice représentative de f , $\mathcal{M}_f$ dans la base $\mathcal{B}$?
- Déterminez $\text{Ker } f$ et sa base. Quelle est sa dimension? Donnez une interprétation géométrique.
- Trouvez le rang de f et une base de $\text{Im } f$.
- f est-elle injective, surjective, bijective?
- Diagonalisez $\mathcal{M}_f$ et déterminez ses espaces propres : On donne $\det \mathcal{M}_f = 0$. Qu'en déduisez-vous? Montrez que $P(\lambda) = \lambda(\lambda - a)(\lambda - b)$, a et b sont à déterminer.

Classez les valeurs propres par ordre décroissant. Les vecteurs propres sont à déterminer tel que la première composante non-nulle soit 1. Exprimer $\mathcal{M}_f$ en fonction d'une matrice diagonale $\mathcal{D}$ et d'une matrice de passage $\mathcal{P}$. Calculez l'inverse de $\mathcal{P}$.

Exercice 4 : Fonction de deux variables (3 points)

Soit $f(x, y) = e^{x^3 + \sqrt{y}}$.

- Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? Représenter $\mathcal{D}_f$ graphiquement.
- Calculez le gradient de f .

Exercice 1 : Question de cours.

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 5 & \pi & \pi \\ 0 & 5 & \pi \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

M est une matrice triangulaire supérieure $\Rightarrow$ ses valeurs propres sont les termes sur la diagonale.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5 \text{ (valeur propre triple)}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5I$$

$$M = PDP^{-1} = P(5I)P^{-1} = 5PIP^{-1} = 5PP^{-1} = 5I$$

Si 5 est valeur propre triple, on trouve que $M = 5I$, ce qui absurde $\Rightarrow M$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 : Système linéaire paramétré

$$\begin{aligned} m \in \mathbb{R} \quad & mx + y = 3 \\ & x + 4my = -6 \end{aligned}$$

On peut écrire ce système sous la forme matricielle $A\vec{X} = \vec{B}$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 4m \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\det A = 4m^2 - 1$. On trouve les valeurs critiques de A en annulant le déterminant $\det A = 0$

$$4m^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4}$$

$$m = \pm \frac{1}{2}$$

3 cas à étudier : ① $m \neq \frac{1}{2}$ et $m \neq -\frac{1}{2}$

② $m = \frac{1}{2}$) cas dégénérés.

③ $m = -\frac{1}{2}$

Pour le cas ①, on trouve une solution unique en fonction de m avec la méthode de Cramer

Exercice 3 : Application linéaire.

3

$$f(x, y, z) = (-2x - 4z, -3y, 2x + 3y + 4z)$$

(a) f est linéaire car toutes ses composantes sont de la forme $ax + by + cz$.

$$f: \underset{\substack{E \\ \text{(espace de part)}}}{\mathbb{R}^3} \rightarrow \underset{\substack{F \\ \text{(espace arrivée)}}}{\mathbb{R}^3}$$

(b) $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

$$-2x - 4z = -2(1, 0, 0) + (-4)(0, 0, 1) = -2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3$$

$$-3y = -3\vec{e}_2$$

$$2x + 3y + 4z = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

(c) $M_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\text{Ker } f = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$

$\Rightarrow$ On résout $f(x, y, z) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} -2x - 4z = 0 & L_1 \\ -3y = 0 & L_2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 & L_3 \end{array}$

De L_2 , $y = 0 \Rightarrow L_1 = L_3$

$y = 0$
 $2x + 4z = 0 \Rightarrow$ système sans déterminé. On prend z en paramètre

$\Rightarrow x = -2z, y = 0$

$\text{Ker } f = \left\{ z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$. Base $\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \text{Ker } f = 1$ car sa base contient 1 vecteur.

$\text{Ker } f$ est une droite vectorielle de coeff directeur $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vecteur)

(e) Théorème du rang : $\dim E = \text{rang } f + \dim \text{Ker } f$
 $\text{rang } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 2$

$$\det A_x = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 4m \end{pmatrix} = 12m + 6 = 6(2m+1) \quad (2)$$

$$\det A_y = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = -6m - 3 = -3(2m+1)$$

$$\det A = 4m^2 - 1 = (2m+1)(2m-1)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{6(2m+1)}{(2m+1)(2m-1)} = \frac{6}{2m-1}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-3(2m+1)}{(2m+1)(2m-1)} = \frac{-3}{2m-1}$$

$$\text{Solution} = \left(\frac{6}{2m-1}, \frac{-3}{2m-1} \right)$$

Cas ② : $m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ le système s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x + y & = & 3 \quad - L_1 \\ x + 2y & = & -6 \quad - L_2 \end{array}$$

$$L_1 \times 2 \Rightarrow \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 6 \quad - L_1 \\ x + 2y & = & -6 \quad - L_2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 6 \\ x + 2y & = & -6 \end{array}} \right\} \text{équations incompatibles}$$

Pas de solution

Cas ③ : $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ le système s'écrit

$$\begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}x + y & = & 3 \quad L_1 \\ x - 2y & = & -6 \quad L_2 \end{array}$$

$$L_1 \times 2 \Rightarrow \begin{array}{rcl} -x + 2y & = & 6 \quad L_1 \\ x - 2y & = & -6 \quad L_2 \end{array} \quad L_1 = L_2 \quad \begin{array}{l} x - 2y = -6 \\ \text{Système sans-déterminé} \end{array}$$

On pose y m paramètre des solutions $\Rightarrow x = 2y - 6$

$$\text{Solution} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y-6 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Ces solutions forment une droite affine passant par $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de coefficient directeur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$\text{rang } f = 2 \Rightarrow \dim \text{Im } f = 2 \Rightarrow$ sa base contient 2 vecteurs.

Ici $f(\vec{e}_1)$ est colinéaire $f(\vec{e}_3)$.

Par contre, $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$ sont indépendants et forment une famille libre. $\Rightarrow$ Base $\text{Im } f = \text{vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2))$.

- (d) f n'est pas injective car $\text{Ker } f \neq \{0\}$.
 f n'est pas surjective car $\dim F \neq \text{rang } f$.
 f n'est pas bijective car elle n'est ni injective ni surjective.

(g) Si $\det M_f = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^3 \lambda_i = 0 \Rightarrow$ au moins une des valeurs propres est nulle.

$$P(\lambda) = \det(M_f - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{car somme des lignes} = -\lambda$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = -\lambda(-3-\lambda)(2-\lambda)$$

Pour trouver les v.p, on annule $P(\lambda) \Rightarrow P(\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2.$$

Vérifications : $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = \text{Tr}(M_f)$

$$2+0-3 = -1 \quad -2-3+4 = -1 \quad \text{OK.}$$

$$\det M_f = 0$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 2 \times 0 \times -3 = 0 \quad \text{OK}$$

On va déterminer les espaces propres en choisissant un vecteur $\vec{v}$ tel que $(M_f - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$

$$\bullet \lambda_1 = 2 \Rightarrow (M_f - \lambda I) \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$-4x - 4z = 0$$

$$y = 0$$

$$2x + 2z = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$x + z = 0$$

$$y = 0$$

$$E_{\lambda_1} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Vecteur de base de } E_{\lambda_1} = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\bullet \lambda = 0 \Rightarrow$ Ceci revient à déterminer le noyau de f

$$\text{Base de } \text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ par respecter les conditions imposées.}$$

$$\bullet \lambda = -3 \Rightarrow (M_f - \lambda I) \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

ce qui est équivalent à $z - 4z = 0$

$$2x + 3y + 7z = 0$$

$$E_{\lambda_3} = \left\{ z \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$M_f = P D P^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5/4 \\ -1 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6/5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4/5 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule P^{-1} avec la méthode du pivot de Gauss ou comatrice