Année Universitaire 2015-2016
Université Paris I Panthéon-Sorbonne.
UFR 06-Gestion Sorbonne
L2 Gestion
Cours: Statistiques.
**Responsable de cours : M. SALVADORE - Maître de conférence**

# TD 4: variables discrètes

Exercice 1: 3 étudiants doivent passer un entretien d'embauche. Chaque entrevue se traduit soit par l'offre d'une place, soit par le rejet de la candidature. Les issues de l'expérience sont définies par les résultats des trois entretiens.

a) Enumérer les issues de l'expérience
b) Soit N la variable aléatoire qui représente le nombre d'offres faites. De quel type de variable s'agit-il?
c) Donner la valeur de la variable aléatoire N pour chaque issue de l'expérience.

Exercice 2: Soit X la variable aléatoire qui représente la somme obtenue au cours du lancement de deux dés

a) Etablir la distribution de probabilité pour X
b) Construire le graphe de cette distribution

Exercice 3: Les distributions des niveaux de satisfaction sur le plan professionnel de deux échantillons l'un de cadres supérieurs et l'autre de juniors d'une entreprise sont présentés ci-dessous: les niveaux de satisfaction vont de 1 (très insatisfait) et 5 (très satisfait)

| PROBABILITE<br>NIVEAU DE SATISFACTION | CADRES SUPERIEURS | CADRES JUNIORS |
|---|---|---|
| 1 | 0,05 | 0,04 |
| 2 | 0,09 | 0,10 |
| 3 | 0,03 | 0,12 |
| 4 | 0,42 | 0,46 |
| 5 | 0,41 | 0,28 |
| Total | 1,00 | 1,00 |

a) Quelle est l'espérance mathématique des niveaux de satisfaction des cadres supérieurs?
b) Quelle est l'espérance mathématique des niveaux de satisfaction des cadres juniors?
c) Calculez la variance des niveaux de satisfaction des cadres supérieurs et juniors?
d) Calculez l'écart type des niveaux de satisfaction des cadres supérieurs et juniors ?
e) Conclure sur le niveau de satisfaction des cadres

Exercice 4 : Un gardien de nuit doit ouvrir l'une des portes à contrôler pendant sa tournée, dans le noir. Il possède un trousseau de 10 clés d'allures semblables, mais seule une clé peut ouvrir la porte en question. L'essai des clés se fait au hasard. Le gardien dispose de deux méthodes : La méthode A rationnelle : qui consiste à essayer chaque clé, l'une après l'autre, en prenant garde de ne pas utiliser la même clé et la méthode B désordonnée qui consiste à essayer une clé après avoir agité le trousseau, chaque fois que le gardien essaye une clé, celle ci peut avoir ou non été déjà essayée

1) On appelle $X_A$ la variable aléatoire qui désigne le nombre de clés essayées (y compris celle qui donne satisfaction) par la méthode A. Déterminer la loi de probabilité de $X_A$, son espérance et son écart type.

2) De même, on appelle $X_B$, la variable aléatoire analogue que l'on obtient par la méthode B. déterminer la loi de probabilité de $X_B$.

3) Quelle est la probabilité d'essayer plus de 8 clés par chacune des 2 méthodes?

4) Le gardien utilise la méthode A lorsqu'il est à jeun et la méthode B lorsqu'il est ivre. Un cambrioleur caché à l'intérieur sait qu'il est ivre 1 jour sur 3. Quelle est la probabilité pour que le gardien soit ivre sachant que les 8 premiers essais ont échoué?

Exercice 5 : Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire au hasard une boule et on observe le numéro qu'elle porte.

1) Déterminer l'espace probabilisé (Ω, P(Ω), P) et la variable aléatoire réelle X associés à cette épreuve aléatoire.
2) Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle X ;
3) Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r X puis tracer son graphe.
4) Calculer son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X)

Exercice 6 : Soit X le nombre de voitures qui passent entre 17h et 18h en point donné de l'autoroute. On a observé que le nombre moyen de voitures est de E(X)=4000 et que la variance V(X)= 100 000. Donner une minoration de la probabilité de l'événement le nombre de voitures est compris entre 3500 et 4500.

Exercice 7 : (Extrait juin 2006) Une urne contient trois boules vertes, deux boules oranges et quatre boules rouges. On tire simultanément deux boules de l'urne. Une boule verte fait gagner 2 points, une boule orange fait gagner 1 point et une boule rouge fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de points obtenus

1) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire réelle X.
2) Déterminer la loi de la v.a.r X.
3) Déterminer sa fonction de répartition
4) Calculer son espérance et sa variance

Exercice 8 : Une urne contient deux boules : une rouge et une bleue. On prélève une boule au hasard dans cette urne. Si on obtient une boule rouge on a gagné : si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne accompagnée d'une autre boule bleue identique (on en rajoute une). On procède à un nouveau tirage dans l'urne qui contient alors 3 boules : une rouge et 2 bleues. Si on obtient une boule rouge on a gagné : si on tire une boule bleue, on la remet dans l'urne accompagnée d'une autre boule bleue identique (on en rajoute une), puis on procède à un nouveau tirage et ainsi de suite.

1) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a.r X
2) Déterminer la loi de probabilité de la v.a.r X
3) Calculer son espérance mathématique E(X) et sa variance V(X)

Exercice 9 : (Extrait sujet février 2000): On jette un dé équilibré. On note X la variable aléatoire représentant le double du nombre obtenu et Y la variable aléatoire prenant la valeur 1 ou 3 suivant que l'on obtient un numéro impair ou pair.

1) calculer X
2) Calculer Y
3) Calculer X+Y
4) Calculer XY

Exercice 10: (Extrait sujet de juin 1998): Soit l'univers $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0)(1,1)\}$.
On suppose les événements élémentaires équiprobables.
On considère d'autre part deux variables aléatoires X et Y sur Ω définies par :
$X(a,b) = a$, $Y(a,b)=b$ telles que: $P(X = a) = P(Y = b) = ½$, $\forall(a,b) \in \Omega$

1) Vérifier que X et Y sont indépendants.
2) Déterminer la loi de probabilité de $Z = X+Y$ ainsi que la fonction de répartition de Z.
3) Même question pour $T = XY$
4) Calculer l'espérance mathématique et la variance de T.

## Correction TD 4: variables discrètes

Exercice 1 : Soit A l'événement « une place est offerte » et R l'événement « la candidature est rejetée ».

a) $\Omega = \{(A,A,A), (A,A,R), (A,R,A), (A,R,R), (R,A,A), (R,A,R), (R,R,A), (R,R,R)\}$.

Nb : vous pouvez obtenir ces résultats en utilisant également un diagramme arborescent (arbre).

b) Soit N le nombre de places offertes, N est une variable aléatoire discrète.

c)

| Résultats de l'expérience | (A,A,A) | (A,A,R) | (A,R,A) | (A,R,R) | (R,A,A) |
|---|---|---|---|---|---|
| valeur de N | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 |

→

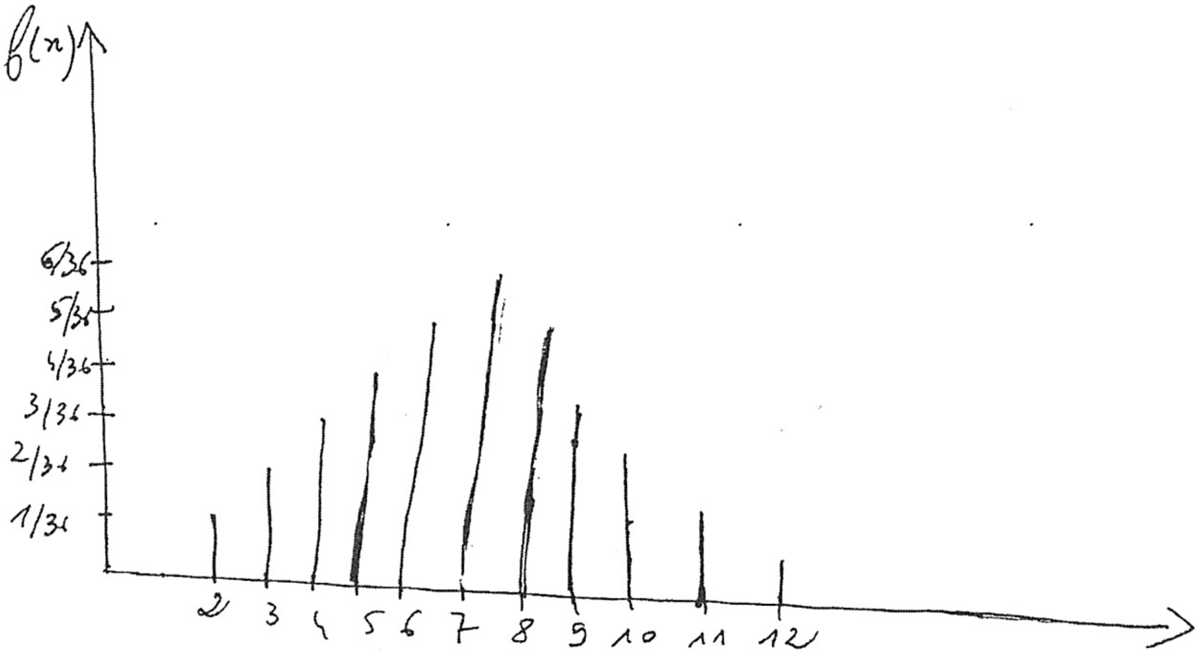
| (R,A,R) | (R,R,A) | (R,R,R) |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |

Exercice 2 : a) La v.a X est la somme des coordonnées des 2 dés. Ainsi pour le couple (3, 2), X = 5. En prenant en compte le fait que chaque face de dé est équiprobable on a $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ les 36 points sont équiprobables.

Par exemple $X=5$ correspond à 4 points $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$ et la probabilité associée à ce résultat est alors $4/36$. Récapitulons l'ensemble des résultats possibles dans le tableau ci-dessous :

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | tot |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{36}{36}=$ |

b)




Exercice 3:

$X$ « niveau de satisfaction des cadres expérimentés »
$Y$ « niveau de satisfaction des cadres juniors »

a) $E(X) = 1\times0{,}05 + 2\times0{,}09 + 3\times0{,}03 + 4\times0{,}42 + 5\times0{,}41$
$= 4{,}05$

b) $E(Y) = 1\times0{,}04 + 2\times0{,}10 + 0{,}12\times3 + 4\times0{,}46 + 5\times0{,}28$
$= 3{,}84$

c) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
$= \left[(1^2\times0{,}05)+(2^2\times0{,}09)+(3^2\times0{,}03)+(4^2\times0{,}42)+(5^2\times0{,}41)\right]$
$- ((4{,}05))^2$

TD ~~4~~ 3

$V(X) = (0,05 + 1,31 + 0,27 + \cdots) - 16,40$

$= 17,65 - 16,40$

$\simeq 1,25$

$V(Y) = [(1^2 \times 0,04) + \cdots + (5^2 \times 0,28)] - (3,84)^2$

$= 15,88 - 14,75$

$= 1,13$

d) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1,12$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 1,06$

e) $E(X) > E(Y)$

$\Rightarrow$ le niveau de satisfaction des cadres supérieurs est supérieur au niveau de satisfaction juniors.

Exercice 1:

1) $X_A$ : 1, 2, 3, 4, ..., 10.

$p(X_A=1) = \frac{1}{10}$ (1 cas favorable parmi 10)

$p(X_A=2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$ (échec au 1er essai et réussite au 2e essai)

$p(X_A=3) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$

⋮

$p(X_A=n) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{10-n+1}{10-n+2} \times \frac{1}{10-n+1} = \frac{1}{10}$

$E(X_A) = \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{10} + \dots + 10 \times \frac{1}{10}$

$\boxed{E(X_A) = 5,5}$

$E((X_A)^2) = 1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{1}{10} + \dots + 10^2 \times \frac{1}{10} = 38,50$

$(E(X_A))^2 = (5,5)^2 = 30,25$

$V(X_A) = 38,25 - 30,25 = 8,25$

$\boxed{\sigma(X_A) = 2,87}$

2) $X_B$ : 1, 2, 3 ..., n. (entiers strictement positifs)

$\forall$ l'essai $p(\text{réussite}) = \frac{1}{10}$

$p(\text{échec}) = \frac{9}{10}$

$p(X_B = n) = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10}$ (loi géométrique)

3) $p$ (essayer plus de huit clés) = $p$ (d'échouer les 8 premières fois).

$$pA = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{10}$$

$$\simeq 0,2 = p(+8/A).$$

$$pB = \left(\frac{9}{10}\right)^8 \simeq 0,43 = p(+8/B)$$

4) $p(A) = \frac{2}{3}$ $\quad p(B) = \frac{1}{3}$

$p(+8|A) = 0,2$ $\quad p(+8|B) = 0,43$

$$p(B \backslash +8) = \frac{1/3 \times 0,43}{2/3 \times 0,2 + \frac{1}{3} \times 0,43} = 0,52.$$

Exercice 5 :

1) $\Omega = \{ b_0, b_1, \ldots, b_9 \}$ ; $card(\Omega) = 10$

Il y a équiprobabilité : $P(b_i) = \frac{1}{10}$ ou

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

2) $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots, 9 \}$

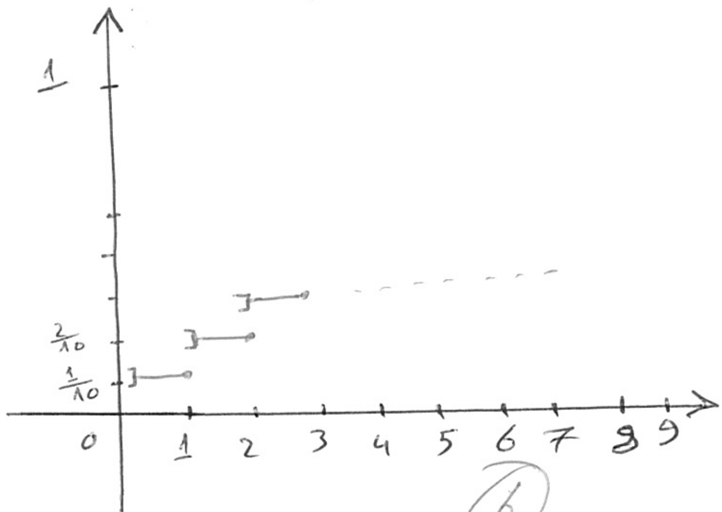
$$P(X = i) = P(\{i\}) = \frac{1}{10}$$

3) $F(x) = P(X < x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- si $x \in ]-\infty, 0]$ ; $F(x) = 0$
- si $x \in ]0, 1]$ ; $F(x) = \frac{1}{10}$
- si $x \in ]1, 2]$ ; $F(x) = \frac{2}{10}$
- si $x \in ]2, 3]$ ; $F(x) = \frac{3}{10}$

$\vdots$

- si $x \in ]9, +\infty[$ ; $F(x) = 1$.




6

4) $E(X) = (0+1+2+3+4 \cdots +9)\frac{1}{10} = \frac{45}{10} = 4{,}5$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (0^2+1^2+\cdots+9^2)\frac{1}{10} - (4{,}5)^2$

$= (1+4+9+16+25+49+64+81)$

$\times \frac{1}{10} - (4{,}5)^2$

$= \cdots$

Exercice 6 : Rappel de cours : Integralité de bienaymé-tchebychev

$3500 < X < 4500 \iff 500 < X - E(X) < 500 \iff$

$|X - E(X)| < 500$

$P[|X - E(X)| < \sigma(X)] = 1 - P[|X - E(X)| \geq 500]$

$= 1 - P\left[|X - E(X)| \geq \frac{500}{\sigma(X)} \cdot \sigma(X)\right]$

$\geq 1 - \left(\frac{\sigma(X)}{500}\right)^2 = 1 - \frac{V(X)}{250000}$

Exercice 7 : 3 V. , 2 O. , 4 R.

1) $\{-6, -2, -1, 2, 3, 4\}$

2) $P(X=-6) = \frac{C_4^2}{C_9^7} = \frac{4!}{2!2!} \times \frac{7!\,2!}{9!} = \frac{1}{6}$

$$P(X=-2) = \frac{C_4^1 \, C_2^1}{C_9^2} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=-1) = \frac{C_3^1 \, C_4^1}{C_9^2} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1 \, C_2^1}{C_9^2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{1}{12}$$

3)

$$F(x) = P(X < x)$$

- si $x \leq -6$ ; $F(x) = 0$
- si $-6 < x \leq -2$ ; $F(x) = \frac{1}{6}$
- si $-2 < x \leq -1$ ; $F(x) = \frac{7}{18}$
- si $-1 < x \leq 2$ ; $F(x) = \frac{13}{18}$
- si $2 < x \leq 3$ ; $F(x) = \frac{27}{36}$
- si $3 < x \leq 4$ ; $F(x) = \frac{11}{12}$
- si $x > 4$ ; $F(x) = 1$

4) $$E(X) = -6 \times \frac{1}{6} - 2\,\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{36} + \frac{3}{6} + \frac{4}{12}$$

$$= \frac{-16}{18} = \frac{-8}{9}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{36}{6} + \frac{8}{9} + \frac{1}{3} + \frac{4}{36} + \frac{9}{6} + \frac{16}{12} - \frac{64}{81}$$

$$= \boxed{\frac{1519}{162}}$$

## Ex 8.4:

(8.4)

1) $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots\} \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{N}}^*$ NB: "$+\infty$" ne jamais tirer la boule rouge !

2) $P(X = k)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et $P(X = +\infty)$.

L'évènement $(X = k) \equiv$ "Bleu au 1er et Bleu au 2e et ... et Bleu au $(k-1)^e$ et Rouge au $k^e$"

On note $A_B^i$ : tirer bleu au $i^e$ et $A_R^i$ : tirer rouge au $i^e$

$$(X = k) = A_B^1 \cap A_B^2 \cap \dots \cap A_B^{k-1} \cap A_R^k$$

On sait que $P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B)$. De m. $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P_A(B)\, P_{A \cap B}(C)$

En effet, $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)\, P_{A \cap B}(C) = P(A)\, P_A(B)\, P_{A \cap B}(C)$.

D'une manière générale:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)$$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X = k) = P(A_B^1)\, P_{A_B^1}(A_B^2) \dots P_{A_B^1 \cap A_B^2 \cap \dots \cap A_B^{k-2}}(A_B^{k-1})\, P_{A_B^1 \cap A_B^2 \cap \dots \cap A_B^{k-1}}(A_R^k)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{(k-1)!}{(k+1)!} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

$$\text{Dc } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

8.5

$P(X=+\infty)$ ?

$$P(X=+\infty) = 1 - P(X<+\infty) = 1 - \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

" $P(X=+\infty) = 0$ " $\longrightarrow$ le jeu de boules s'arrêtera, à coup sûr, un jour !

3) $E(X) = \sum_{x\in\mathcal{X}} x\,P(X=x) = \sum_{k\in\overline{\mathbb{N}}^*} k\,P(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,P(X=k)$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

X n'a pas d'espérance mathématique ■

11

TD. 3.9

Exercice 9.(Extrait sujet février 2000) (4 points)

L'ensemble fondamental est {1, 2, 3, 4, 5, 6} et chacun des nombres est équiprobable (1/6)

1) X prend les valeurs 2, 4, 6, 8, 10, 12 et la distribution de probabilité de X sera donc: (1 point)

| xi | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(X=xi)=pi | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

$E(X)=\sum pixi=2*1/6 + 4*1/6 + 6*1/6 + 8*1/6 + 10*1/6 + 12*1/6=42/6=7$

$V(X)= E(X^2) - (E(X))^2= \sum pixi^2 - 7^2$

$= 4*1/6 + 16*1/6 + 36*1/6 + 64*1/6 + 100*1/6 +144*1/6 - 49$

$= 60{,}7 - 49$

$= 11{,}7$

2) Y prend les valeurs 1, 3 et la distribution de probabilité de Y sera donc (1point)

| yi | 1 | 3 |
|---|---|---|
| P(Y=yi)=pi | 1/2 | 1/2 |

$E(Y)= 1*1/2 + 3*1/2=2$

$V(Y)= 1*1/2+9*1/2 - 2^2 = 5 - 4 =1$

3) On suppose bien sûr l'indépendance des résultats ce qui paraît évident

Z = X+ Y prend les valeurs 3, 7, 11, 15 et la distribution de probabilité de Z est alors: (1point)

| xi | 3 | 7 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| p(Z=zi)=pi | 1/6 | 2/6 | 2/6 | 1/6 |

$E(X+Y)= 3*1/6+7*2/6+11*2/6+15*1/6= 54/6=9$

$V(X+Y)= (E(X+Y)^2)- E(X+Y)^2 = 9*1/6+49*2/6+121*2/6+225*1/6 - 9^2 = 14{,}7$

4) W=XY prend les valeurs 2, 6 , 10, 12, 24, 36 la distribution de probabilité de W : (1point)

| wi | 2 | 6 | 10 | 12 | 24 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| p(W=wi)=pi | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

$E(XY)=2*1/6+6*1/6+10*1/6+12*1/6+24*1/6+36*1/6=90/6=15$

$V(XY)=(E(XY)^2) - E(XY)^2$

$= 4*1/6+36*1/6+100*1/6+144*1/6+576*1/6+1296*1/6 -15^2$

$= 359{,}3-15^2 = 134{,}3$

$\boxed{\text{Exercice 10}}$ (extrait du sujet juin 1998)

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | Loi de X |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| 1 | 1/4 | 1/4 | 1/2 |
| Loi de Y | 1/2 | 1/2 | 1 |

Puisque les événements élémentaires dans $\Omega$ sont équiprobables, on a :

$$P\{(a,b)\} = \frac{1}{4} \quad \forall (a,b) \in \Omega \}.$$

$$P(X = a) \times P(X = b) = \frac{1}{4} \quad \forall (a,b) \in \Omega$$

par suite $P(X=, Y=) = P\{(a,b)\} = P(X = a) \times P(X = b)$ $\forall (a,b) \in \Omega$ Ainsi X et Y sont indépendant.

Fonction de répartition de $Z$ :

$$F(z) = P(Z < z).$$

- si $z < 0$, $F(z) = 0$
- si $z = 0$, $F(z) = \frac{1}{4}$
- si $z < 1$, $F(z) = \frac{1}{4}$.
- si $z = 1$, $F(z) = \frac{3}{4}$
- si $z < 2$, $F(z) = \frac{3}{4}$.
- si $z = 2$, $F(z) = 1$
- si $z > 2$, $F(z) = 1$.

3) $T = X \cdot Y$.

$\mathcal{T} = \{0, 1\}$

$P(T=0) = P[(X=0 \text{ et } Y=0) \underline{\underline{\text{ou}}} (X=0 \text{ et } Y=1)$
$\underline{\underline{\text{ou}}} (X=1 \text{ et } Y=0)]$

$= P\{(0,0)\} + P\{(0,1)\} + P\{(1,0)\}$

$= \frac{3}{4}.$

$$p(T=1) = p\{(X=1 \text{ et } Y=1)\}$$ TD 4.8

$$= p\{(1,1)\} = \frac{1}{4}.$$

4) $$E(T) = \sum_{k=0}^{1} k \, p(T=k).$$

$$= 0 \times p(T=0) + 1 \times p(T=1)$$

$$= \frac{1}{4}.$$

$$V(T) = E\left[(T - E(T))^2\right]$$

$$= E\left[\left(T - \frac{1}{4}\right)^2\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left(0 - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16}$$

$$= \frac{12}{4 \times 16}$$

$$= \frac{3}{16}$$