

Exercice 1

(a) Soient $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont libres (ssi) il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 + \gamma \vec{V}_3 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

Autrement, dit la combinaison linéaire de ces 3 vecteurs donne le vecteur nul uniquement si les coefficients sont nuls.

Sinon, $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont liés.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut résoudre ce système en utilisant le pivot de Gauss.

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad L_1$$

$$-5\alpha - 2\beta + 5\gamma = 0 \quad L_2$$

$$3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad L_3$$

$L_2 + 5L_1 \leftarrow L_2$ et $L_3 - 3L_1 \leftarrow L_3$ donnent le système suivant par éliminer α avec L_1 en pivot :

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad L_1$$

$$3\beta + 15\gamma = 0 \quad L_2$$

$$-\beta - 5\gamma = 0 \quad L_3$$

Si on divise L_2 par 3 et on multiplie L_3 par -1 , le système devient $\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad L_1$

$$\beta + 5\gamma = 0 \quad L_2$$

$$\beta + 5\gamma = 0 \quad L_3$$

L_3 et L_2 sont les mêmes équations, on en garde qu'une.

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \quad L_1$$

$$\beta + 5\gamma = 0 \quad L_2$$

(2)

C'est un système sans-déterminé car il y a plus d'inconnues que d'équations. Il faut poser un paramètre pour trouver les solutions (il y en a une infinité).

posons γ comme paramètre

$$\beta = -5\gamma \text{ et } \alpha = -\beta - 2\gamma = 3\gamma$$

L'ensemble de solutions s'écrit :

$$S' = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est un espace vectoriel qui représente une droite vectorielle de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. S' représente toutes les solutions du système, $(0, 0, 0)$ n'est pas la seule solution $\Rightarrow \underline{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ et } \vec{v}_3 \text{ sont liés}}$

Le rang est la dimension de l'espace engendré par la famille de vecteurs. Pour déterminer, il faut la plus grande famille extraite de vecteurs libres.

La famille entière ici avec $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ est liée
 $\Rightarrow \text{rang} < 3 \Rightarrow \text{rang} \leq 2$.

On extrait 2 vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ par exemple.

Ces 2 vecteurs sont libres car n'étant pas proportionnels
 $\text{rang} = 2$.

(b)

Soient $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour que ces 3 vecteurs forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, il faut que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ puisse s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

Soit $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow \alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 + \gamma \vec{V}_3 = \vec{V}$ si la famille est génératrice

$$\alpha + \beta + \gamma = x \quad L_1$$

$$2\alpha + \beta + \gamma = y \quad L_2$$

$$\alpha + \beta + \gamma = x \quad L_1 \text{ peut être éliminé } \alpha$$

$$-3\beta - \gamma = y - 2x \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Système sous-déterminé de 2 eq à 3 inconnues

Posons $\beta = 0 \Rightarrow \gamma = 2x - y$ et $\alpha = y - x$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y - x) \vec{V}_1 + 0 \cdot \vec{V}_2 + (2x - y) \vec{V}_3$$

C'est donc une famille génératrice. A noter que l'écriture n'est pas unique puisqu'on a posé $\beta = 0$ de manière arbitraire. Il existe donc d'autres décompositions pour $\beta \neq 0$. La famille n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
(3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ne peuvent être libres)

Exercice 2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Par hypothèse que c'est une base, il faut montrer qu'ils sont libres et forment une famille génératrice. Or, on a 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, s'ils sont libres, ils forment aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(théorème de la dimension finie et théorème de la base incomplète).

Par hypothèse que c'est une famille libre:

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0} \rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$$2\alpha + \beta = 0 \quad L_1 \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \quad L_1$$

$$3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad L_2 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad L_2$$

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \quad L_3 \quad 2\alpha + \beta = 0 \quad L_3$$

permutation
L1 / L3

On élimine γ de L_2 :

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \quad L_1$$

$$5\alpha + 2\beta = 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$2\alpha + \beta = 0 \quad L_3$$

On élimine β ensuite de L_3 :

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \quad L_1$$

$$5\alpha + 2\beta = 0 \quad L_2$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0 \quad L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

La famille est donc libre $\Rightarrow$ 3 vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ sont générateurs de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ C'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- (b) $\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se décompose sur $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$
 car c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et $T \in \mathbb{R}^3$.
 $\Rightarrow \vec{T} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$.

Cette décomposition est unique car la famille est une base $\Rightarrow (a, b, c)$ sont des coefficients uniques

$$\begin{array}{rcl} 2a + b & = & 1 \quad L_1 \\ 3a + 2b + c & = & 0 \quad L_2 \\ a + 2b + 2c & = & 0 \quad L_3 \end{array}$$

A résoudre comme précédemment et on trouve ainsi :

$$a = -2, \quad b = 5, \quad c = -4$$

$$\Rightarrow \vec{T} = -2\vec{x} + 5\vec{y} - 4\vec{z}$$

$(-2, 5, -4)$ représentent les coordonnées de $\vec{T}$ dans la base $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{base canonique}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}_{\text{base } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}}$$

Exercice 3

- (a) f est une application linéaire $f: E \rightarrow F$ (ssi)

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,$$

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{u}) + \mu \cdot f(\vec{v})$$

f est une application linéaire ici car tous ses termes sont linéaires, de la forme $ax + by + cz$; avec ici

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 0 \quad \text{pour} \quad 2x + 3y$$

$$\text{et } a = 0, \quad b = 2, \quad c = 2 \quad \text{pour} \quad y + 2z.$$

- (b) le rang de f est le rang de la famille de vecteurs formée par les images de f sur une base de E

(6)

On sait par ailleurs que $\text{rang } f \leq \min(\dim E, \dim F)$.
 $\Rightarrow$ ici on sait que le rang de $f \leq 2$ car
 $\dim E = 3$ et $\dim F = 2$.

Une base de $E = \mathbb{R}^3$ est $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0) \text{ et } (0, 0, 1)\}$

$$f(1, 0, 0) = (2, 0) = \vec{v}_1$$

$$f(0, 1, 0) = (3, 1) = \vec{v}_2$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 2) = \vec{v}_3$$

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas proportionnels et donc forment une famille libre.

$$\underline{\text{rang } f = 2}$$

Le noyau de f , noté $\text{Ker } f$, est défini par

$$\text{Ker } f = \{ \vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0} \}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) \in \text{Ker } f \quad (\text{ssi})$$

$$f(x, y, z) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 0 \quad L_1$$

$$y + 2z = 0 \quad L_2$$

C'est un système sous-déterminé $\Rightarrow$ on pose z en paramètre.

$$y = -2z, \quad x = -\frac{3}{2}y = 3z$$

$$\text{Ker } f = \left\{ z \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) f n'est pas injective car $\text{Ker } f \neq \{\vec{0}\}$

f est surjective car $\text{rang } f = 2 = \dim F = \dim \mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

$$f(x, y) = (2x, 0, x + y)$$

(a) voir définition dans l'Ex 3.

Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs de l'espace de départ dont l'image est le vecteur nul.

Le rang de f est la dimension de l'image de l'espace de départ.

(b) $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{x} = (x, y) \quad \vec{y} = (x', y')$

$$\begin{aligned} f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) \\ &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \quad \begin{array}{l} U = \alpha x + \beta x' \\ V = \alpha y + \beta y' \end{array} \\ &= f(U, V) \\ &= (2U, 0, U + V) \\ &= (2\alpha x + 2\beta x', 0, \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y') \\ &= (2\alpha x, 0, \alpha x + \alpha y) + (2\beta x', 0, \beta x' + \beta y') \\ &= \alpha(2x, 0, x + y) + \beta(2x', 0, x' + y') \\ &= \alpha \cdot f(\vec{x}) + \beta \cdot f(\vec{y}) \end{aligned}$$

(c) f peut-elle être surjective ?

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. La dimension de l'espace de départ est inférieure à celle de l'espace d'arrivée. Donc, f ne peut être surjective.

Supposons f surjective $\Rightarrow \text{rang } f = \dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Appliquons le théorème du rang :

$$\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \text{rang } f$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker } f) = \dim E - \text{rang } f = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rang } f = -1.$$

Ce qui est aberrant car la dimension d'un espace est ≥ 0 . Donc, f ne peut être surjective.

(d) On prend une base de $\mathbb{R}^2$ et on calcule les images sous f .

$$f(1, 0) = (2, 0, 1)$$

$$f(0, 1) = (0, 0, 1)$$

Ce sont deux non-proportionnels, et donc $\text{rang } f = 2$ (donc, f n'est pas surjective)

(e) Calculons le noyau de f .

$$f(x, y) = \vec{0} \Rightarrow \begin{array}{lcl} 2x = 0 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 \\ x + y = 0 & L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x = 0, y = 0$$

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ \vec{0} \}$$

(f) f est bien injective car $\text{Ker } f = \{ \vec{0} \}$

(g) Oui car $\text{Ker } f$ est toujours un sev de l'espace de départ.

Démonstration : $\text{Ker } f$ est non-vide car $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

Soient $\vec{X}$ et $\vec{Y} \in \text{Ker } f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\vec{X} + \lambda \vec{Y}) &= f(\vec{X}) + \lambda f(\vec{Y}) \quad (\text{def app. linéaire}) \\ &= \vec{0} + \lambda \cdot \vec{0} \quad \text{car } f(\vec{X}) = \vec{0} \text{ et } f(\vec{Y}) = \vec{0} \text{ si } \vec{X} \text{ et } \vec{Y} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{X} + \lambda \vec{Y} \in \text{Ker } f.$$

Par définition : $\text{Ker } f = \{ \vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0} \} \Rightarrow$ si

$$\vec{X}, \lambda \vec{Y} \in \text{Ker } f \Rightarrow \vec{X} + \lambda \vec{Y} \in E.$$