Chapitre 5

Optimisation libre

5.1 Définitions

Définition *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, soit A un sous-ensemble de D et $X^* \in A$, alors*

— *f admet un* ***maximum global*** *sur A en X^* si et seulement si :*
$\forall X \in A : f(X) \leq f(X^*)$.
$f(X^*) = \max\limits_{X \in A} f(X)$ *et* $X^* \in \arg\max\limits_{X \in A} f(X)$

— *f admet un* ***minimum global*** *sur A en X^* si et seulement si :*
$\forall X \in A : f(X) \geq f(X^*)$.
$f(X^*) = \min\limits_{X \in A} f(X)$ *et* $X^* \in \arg\min\limits_{X \in A} f(X)$

Remarque :

Ce n'est pas parce qu'un maximum est global sur A qu'il est atteint en un point unique, la notion de globalité signifie que la fonction est toujours en tout point de A au-dessous de la valeur atteinte au maximum global. Par contre la valeur du maximum global est elle bien sur unique.

De façon générale, il faut bien distinguer le maximum M qui correspond à la valeur maximale de la fonction et le point auquel est atteint ce maximum c'est à dire un X qui vérifie $f(X) = M$, X est généralement appelé argmax.

Définition *Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$, soit A un sous-ensemble de D et $X^* \in A$, alors :*

— *f admet un* ***maximum local*** *sur A en X^* si et seulement si il existe un voisinage V de X^* sur lequel f admet un maximum en X^*.*
$\forall X \in V : f(X) \leq f(X^*)$, *on note alors :*
$f(X^*) = \max\limits_{X \in V} f(X)$ *et* $X^* \in \arg\max\limits_{X \in V} f(X)$.

— *f admet un **minimum local** sur A en X^* si et seulement si il existe un voisinage V de X^* sur lequel f admet un minimum en X^*.*
$\forall X \in V : f(X) \geq f(X^*)$, *on note alors :*
$f(X^*) = \min\limits_{X \in V} f(X)$ *et* $X^* \in \arg\min\limits_{X \in V} f(X)$

Remarque :
Un maximum (resp. minimum) global est a fortiori un maximum (resp. minimum) local.

Une fonction peut admettre des extrema locaux sans pour autant admettre des extrema globaux.

5.2 Cas des fonctions d'une variable

5.2.1 Points critiques

Proposition *Soit f une fonction continue et dérivable sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $X^* \in D$, alors $f'(X^*) = 0$*

On appelle cette condition la condition nécessaire du 1er ordre.

Preuve
On peut utiliser une preuve par l'absurde et le théorème des accroissements finis ou faire un DL à l'ordre 1.

Définition *On appelle points **critiques** de f l'ensemble des points x vérifiant $f'(x) = 0$*

Explication graphique...

5.2.2 Conditions nécessaires du second ordre

Proposition *Soit f une fonction C^2 sur D. Soit $\Omega \subset D$ l'ensemble des points critiques.*

Si f admet un maximum local en $X^* \in \Omega$, alors $f''(X^*) \leq 0$.

Si f admet un minimum local en $X^* \in \Omega$, alors $f''(X^*) \geq 0$.

5.2.3 Conditions suffisantes du second ordre

Proposition *Soit f une fonction C^2 sur D. Soit $\Omega \subset D$ l'ensemble des points critiques.*

Soit $X^* \in \Omega$, si $f''(X^*) < 0$, alors en X^* on a un maximum local.

Soit $X^* \in \Omega$, si $f''(X^*) > 0$, alors en X^* on a un minimum local.

Exemple :
Cherchez les extrema de $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$

5.2.4 Conditions nécessaires et suffisantes

Proposition *Soit f une fonction de classe C^∞ en un point X^*. Pour que f admette un extremum local en X^*, il est nécessaire et suffisant que la première dérivée non nulle en X^* soit d'ordre pair.*

Preuve
On fait un DL en X^*.

5.3 Cas des fonctions à n variables

5.3.1 Points critiques

Proposition *Soit f une fonction continue et dérivable sur D. Si f admet un extremum local en X^*, alors $df(X^*) = 0$.*

On appelle cette condition la condition nécessaire du 1er ordre.

Définition *L'ensemble des points X^* tel que la différentielle est nulle sont appelés points* ***candidats*** *ou points* ***critiques****.*

Explication graphique...

5.3.2 Conditions nécessaires du 2nd ordre

Proposition *Soit f une fonction C^2 sur D. Soit $\Omega \subset D$ l'ensemble des points critiques.*

- *Si f admet un maximum local en $X^* \in \Omega$, alors $d^2f(X^*)$ est semi-définie négative.*
- *Si f admet un minimum local en $X^* \in \Omega$, alors $d^2f(X^*)$ est semi-définie positive.*

5.3.3 Conditions suffisantes du 2nd ordre

Proposition *Soit f une fonction C^2 sur D. Soit $\Omega \subset D$ l'ensemble des points critiques. Soit $X^* \in \Omega$ alors :*

- *Si la forme quadratique $d^2f_{X^*}$ est définie négative, alors f admet un maximum local en X^*.*
- *Si la forme quadratique $d^2f_{X^*}$ est définie positive, alors f admet un minimum local en X^*.*

5.3.4 Point selle

Définition *On appelle* ***point selle*** *de la fonction f un point critique qui n'est ni un maximum local ni un minimum local.*

Proposition *Soit X^* un point critique, si $d^2 f_{X^*}$ est non définie alors X^* est un point selle.*

(Preuve...)

5.3.5 Exemple

On vient donc de voir que pour connaître la nature d'un point candidat il suffit d'étudier la forme quadratique $d^2 f$, il faut donc étudier la matrice hessienne $D^2 f$ et notamment les signes de ses valeurs propres.

Optimisez $f(x, y, z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$.

5.4 Fonctions concaves et convexes

5.4.1 Ensemble convexe

Définition *Soit D un ensemble alors D est dit* ***convexe*** *si $\forall (X, Y) \in D \times D$ et $\forall t \in [0, 1]$ on a : $t.X + (1-t).Y \in D$.*

Explication et exemples...

Définition *Soit D un ensemble alors D est dit* ***concave*** *ssi son complémentaire est un ensemble convexe.*

Attention : un ensemble peut être ni convexe ni concave.

5.4.2 Fonctions convexes

Définition *Soit f une fonction définie sur un ensemble D convexe alors :*

- *f est* ***convexe*** *ssi : $\forall X, Y \in D^2$ et $\forall t \in [0, 1]$: $f(tX + (1-t)Y) \leq t.f(X) + (1-t).f(Y)$*
- *f est* ***strictement convexe*** *ssi : $\forall X, Y \in D^2$ tel que $X \neq Y$ et $\forall t \in]0, 1[$: $f(tX + (1-t)Y) < t.f(X) + (1-t).f(Y)$*

Explication graphique...

En définissant $G^+(f) = \{(x, y) | y \geq f(x)\}$, on voit que f est convexe si et seulement si l'ensemble G^+ est un ensemble convexe. Autrement dit l'ensemble des points situés au dessus du graphe de f doit être un ensemble convexe.

5.4.3 Fonctions concaves

Lorsque l'ensemble G^+ est un ensemble concave on dira que la fonction est concave, d'où les définitions suivantes

Définition *Soit f une fonction définie sur un ensemble Ω convexe alors :*

— *f est **concave** ssi :* $\forall X, Y \in D^2$ *et* $\forall t \in [0,1]$:
$f(tX + (1-t)Y) \geq t.f(X) + (1-t).f(Y)$

— *f est **strictement concave** ssi :* $\forall X, Y \in D^2$ *tels que* $X \neq Y$ *et* $\forall t \in]0,1[$:
$f(tX + (1-t)Y) > t.f(X) + (1-t).f(Y)$

5.4.4 Propriétés

Proposition *Soit f une fonction C^2 sur un domaine D alors :*

— *f est convexe sur D si et seulement si $\forall X \in D : D^2 f(X)$ est semi-définie positive.*

— *f est concave sur D si et seulement si $\forall X \in D : D^2 f(X)$ est semi-définie négative.*

— *f est strictement convexe sur D si et seulement si $\forall X \in D : D^2 f(X)$ est définie positive.*

— *f est strictement concave sur D si et seulement si $\forall X \in D : D^2 f(X)$ est définie négative.*

5.4.5 Retour sur l'optimisation

Proposition *Soit f une fonction C^2 sur un domaine D alors :*

— *Si f est convexe sur D, alors f admet un minimum global en X^* si et seulement si X^* est un point critique.*
Si f est concave sur D, alors f admet un maximum global en X^* si et seulement si X^* est un point critique.
Si f est strictement convexe sur D, alors s'il existe le minimum global est atteint en un point unique.

— *Si f est strictement concave sur D, alors s'il existe le maximum global est atteint en un point unique.*

5.4.6 Exemples

— Trouvez les extrema de $f(x,y) = x^2 + y^2$, le ou les extremas sont-ils globaux ou locaux ?

— Trouvez les extrema de $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 + 1$, le ou les extremas sont-ils globaux ou locaux ?

— Trouvez les extrema de $f(x, y) = x^4 + y^3 + y^2$, le ou les extremas sont-ils globaux ou locaux ?

Lien avec les statistiques

Soient n observations (X_i, Y_i) on cherche la meilleure droite qui permet d'expliquer y en fonction de x. Soit donc $Y = a.X + b$, on cherche a et b qui minimisent la somme des carrés des ecarts entre les Y_i observés et les Y_i théoriques (donnés par la droite).

Donnez la solution...

5.5 Exercice

On cherche à optimiser la fonction $\Psi(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} - xy + y^2$

a) Déterminez les points candidats à l'optimum.

b) Déterminez la nature de tous les points candidats.

c) La fonction admet-elle un maximum global ? (justifiez)

d) La fonction admet-elle un minimum global ? (justifiez)