

Statistiques appliquées à la gestion

Licence 2 gestion
2023/2024

R. ZAFRI

Maître de Conférences

raouf.zafri@univ-paris1.fr

Sommaire du cours

Chapitre 1 : Dénombrements et analyse combinatoire

Chapitre 2 : Introduction aux formalismes des probabilités

Chapitre 3 : les probabilités conditionnelles

Chapitre 4 : Introduction aux variables aléatoires réelles

Chapitre 5 : Variables aléatoires discrètes usuelles

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles absolument continues

Chapitre 7 : Loi de probabilité

Chapitre 2. Les probabilités

- 1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste**
- 2. Calcul d'une probabilité élémentaire**

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

A. Expérience aléatoire

On dit d'une expérience qu'elle est aléatoire lorsqu'elle vérifie trois conditions :

- On connaît tous les résultats possibles de l'expérience
- Le résultat n'est pas prévisible
- On peut reproduire plusieurs fois l'expérience dans les mêmes conditions

Exemples :

- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus
- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

B. Univers

L'univers est l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. Il est souvent noté Ω .

Une issue est un élément $\omega \in \Omega$

Exemple :

- $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- $\Omega = \{\text{pile ; face}\}$

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

C. Événement

Un évènement est un résultat possible d'une expérience aléatoire. Dans le cas où l'univers Ω est fini, on peut associer de manière unique un évènement A à une partie (ou sous-ensemble) de Ω .

Exemple :

- " Obtenir un numéro impair ». La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{1;3;5\}$
- "Obtenir face". La partie (ou sous-ensemble) associée est $A = \{\text{face}\}$

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

D. Évènement élémentaire, certain, impossible

Un événement est dit :

- *élémentaire* lorsque la partie associée est réduite à un élément

Exemple : "Obtenir 5" est un évènement élémentaire

- *certain* s'il est toujours réalisé (c'est alors Ω). Sa probabilité est égale à 1

Exemple : "Obtenir pile ou face" est un évènement certain, associé à la partie Ω .

- *impossible* s'il n'est jamais réalisé (c'est alors $\emptyset$). Sa probabilité est égale à 0

Exemple : " Obtenir pile et face « est un évènement impossible, associé à la partie $\emptyset$

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

E. Évènement contraire

Soit $\omega \in \Omega$. On dit que ω réalise l'évènement contraire de A , si et seulement si, ω ne réalise pas A . On note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A . La partie $\bar{A}$ associée est la partie constituée de tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A . Autrement dit, $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Exemple :

- Soit A l'évènement "obtenir face". La partie associée est $A = \{\text{face}\}$.
L'évènement contraire est $\bar{A}$: "obtenir pile". La partie associée est $\bar{A} = \{\text{pile}\}$.
- Soit A l'évènement "obtenir un nombre pair". La partie associée est $A = \{2;4;6\}$.
L'évènement contraire est $\bar{A}$: "obtenir un nombre impair". La partie associée est $\bar{A} = \{1;3;5\}$.

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

F. L'évènement A implique l'évènement B

On dit que l'évènement A implique l'évènement B si la réalisation de l'évènement A implique celle de l'évènement B. En terme ensembliste, cela signifie :

$A \text{ implique } B \iff A \subset B$.

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire suivante : on lance un dé à 6 faces deux fois de suite. Soient :

A : "faire un 6 au premier lancé"

B : "faire au moins un 6".

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

G. L'évènement A ou B

On dit que l'évènement A **ou** B est réalisé, si et seulement si, au moins l'un des deux évènements A ou B est réalisé.

La partie associée est **AUB**.

Exemple : On reprend l'expérience précédente. Soient :

A : "faire un 3 au premier lancé"

B : "faire un 5 au deuxième lancé"

Les parties associées sont :

$A = \{(3;1); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6)\}$

$B = \{(1;5); (2;5); (3;5); (4;5); (5;5); (6;5)\}$

L'évènement A ou B est "faire un 3 au premier lancé ou un 5 au deuxième lancé" et la partie associée est :

$A \cup B = \{(3;1); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6); (1;5); (2;5); (4;5); (5;5); (6;5)\}.$

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

H. L'évènement A et B

On dit que l'évènement A et B est réalisé, si et seulement si, les deux évènements A et B sont réalisés.

La partie associée est $A \cap B$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent.

L'évènement A et B est "faire un 3 au premier lancé et un 5 au deuxième lancé"

La partie associée est : $A \cap B = \{(3;5)\}$

1. L'expérience aléatoire : le cadre probabiliste

I. Les évènements A et B sont incompatibles

On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** si l'évènement A et B est impossible.

Autrement dit, les évènements A et B sont incompatibles si les parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$

Exemple : On reprend l'expérience des exemples précédents. Soient

A : "faire un 3 au premier lancé"

B : "faire un 5 au premier lancé"

On vérifie alors facilement que les deux parties A et B associées vérifient $A \cap B = \emptyset$. Les évènements A et B sont donc incompatibles.

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

A. Définition de la probabilité

On lance un dé à 6 faces, on peut considérer l'événement A suivant :

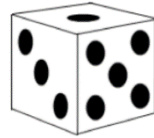
- A : « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3. »
- L'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
- L'événement A est constitué des issues : « 3 », « 4 », « 5 » et « 6 ».
- Quelles sont les chances que l'événement A se réalise ?
- Pour évaluer, les chances que cet événement A se réalise, on peut effectuer un calcul de probabilité :
- Cet événement possède 4 issues possibles sur 6 issues en tout. Il a donc 4 chances sur 6 de se réaliser.
- On dit que la probabilité que cet événement se réalise est de 4 sur 6 que l'on peut noter $\frac{4}{6}$ ou même $\frac{2}{3}$ car $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

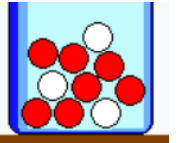
Application

Calculer les probabilités des événements suivants :

1) Tomber sur le nombre 5 en lançant un dé à 6 faces.



2) Obtenir une boule rouge en piochant au hasard une boule dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules rouges.



3) La roue ci-contre s'arrête sur un secteur rouge



2. Calcul d'une probabilité élémentaire

Solution

1) Cet événement possède 1 issue possible favorable (le « 5 ») sur 6 issues en tout. Il a donc 1 chance sur 6 de se réaliser.

La probabilité de tomber sur le nombre 5 en lançant un dé à 6 faces est donc égale à $\frac{1}{6}$.

2) Cet événement possède 7 issues possibles favorables (7 boules rouges) sur 10 issues en tout (7+3=10 boules). Il a donc 7 chances sur 10 de se réaliser. La probabilité d'obtenir une boule verte est donc égale à $\frac{7}{10}$.

3) Cet événement possède 4 issues possibles favorables (4 secteurs rouges) sur 14 issues en tout (14 secteurs). Il a donc 4 chances sur 14 de se réaliser. La probabilité d'obtenir un secteur rouge est donc égale à $\frac{4}{14} = \frac{2}{7}$.

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

A. Définition de la probabilité

- La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance qu'a un évènement de se produire ».
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'évènement A

Une probabilité est par définition à valeurs dans $[0;1]$, ainsi, pour tout évènement A, on a :

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- On vérifiera donc systématiquement que le résultat d'un calcul de probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

B. Propositions en probabilités

Soient A,B deux évènements. Alors :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

C. L'équiprobabilité

Deux évènements A et B sont dits équiprobables si ils ont la même probabilité, c'est-à-dire si $P(A) = P(B)$. On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

On suppose que l'on est en situation d'équiprobabilité. Alors :

- Pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ où $n = \text{card}(\Omega)$
- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

C. L'équiprobabilité

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre inscrit sur la face du dessus

Soit E l'évènement : « La face du dessus est un nombre inférieur ou égal à 2 »

Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?

Solution :

Nombre d'issues favorables à $E = 2$

En effet, pour avoir un nombre inférieur ou égal à 2, il faut obtenir un 2 ou un 1.

Le dé à 6 faces. Le nombre d'issues total est donc = 6

$$\text{Ainsi } P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{1}{3}$. Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 2

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

D. Dénombrement pour le calcul de la probabilité

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

- On tire une carte dans un jeu de 32 cartes
- Soit E l'événement : « On tire un as »
- Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?

Solution

- Il a 32 issues possibles car il existe 32 façon différentes de tirer une carte
- L'événement E possède 4 issues possibles : As de cœur, as de carreau, as de trèfle et as de pique
- $P(E) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$
- La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à : $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

E. Calcul de probabilité dans le cas de non équiprobabilité

Exemple :

Un dé est truqué pour que le 6 apparaisse deux fois plus souvent que les autres faces qui, elles, ont toutes la même probabilité de tomber. Calculer $P(\{4;5;6\})$.

Solution :

- Les nombres 1, 2, 3, 4, et 5 ayant la même probabilité de tomber. On note p la probabilité d'obtenir ces nombres
- Le 6 apparaît deux fois plus souvent que les autres faces. la probabilité d'obtenir 6 est donc égal à $2p$
- Donc $p+p+p+p+p+2p = 1$ (évènement certain)
- Soit $7p = 1$ ou encore $p = \frac{1}{7}$.
- $P(\{4;5;6\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

F. Calcul de probabilité à l'aide d'un tableau à double entrée

Exemple :

On tire, deux fois de suite et avec remise, une boule dans une urne contenant une boule bleue et deux boules rouges.

Déterminer la probabilité de :

- a) Tirer deux boules rouges
- b) Tirer au moins une boule rouge

On réalise un tableau à double entrée présentant en ligne et en colonne les issues possibles pour chaque tirage :

1er tirage 2e tirage			
	 	 	 
	 	 	 
	 	 	 

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

F. Calcul de probabilité à l'aide d'un tableau à double entrée

Exemple :

a) On compte 9 issues en tout et 4 issues favorables à l'événement « *Tirer successivement deux boules rouges* ».

Donc la probabilité de tirer deux boules rouges est égale à $\frac{4}{9}$.

1er tirage 2e tirage	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage

b) L'événement contraire de « *Tirer au moins une boule rouge* » est « *Tirer aucune boule rouge* ».

On compte 9 issues en tout et 1 issue favorable à l'événement « *Tirer aucune boule rouge* ».

Donc la probabilité de tirer aucune boule rouge est égale à : $\frac{1}{9}$

Donc la probabilité de tirer au moins une boule rouge est égale à : $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

1er tirage 2e tirage	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage
	1er tirage	2e tirage	3e tirage	4e tirage

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

G. Calcul de probabilité d'une expérience à deux épreuves à l'aide un arbre des possibles

Exemple :

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.

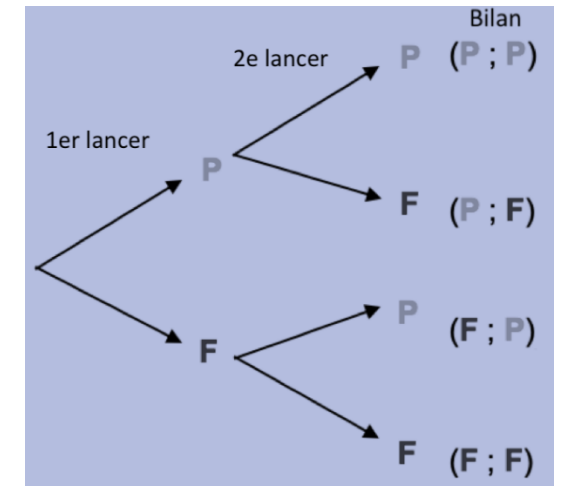
Soit E l'événement : « On obtient au moins une fois la face Pile »

- Calculer $P(E)$ en utilisant un arbre des possibles.

Solution :

On construit un arbre des possibles présentant les résultats possibles aux deux épreuves de l'expérience.

- Le 1^{er} niveau de l'arbre correspond les issues du 1^{er} lancer (1^{ère} épreuve)
- Le 2^e niveau de l'arbre correspond les issues du 2^e lancer (2^e épreuve)
- On compte 4 issues en tout : (P ; P), (P ; F), (F ; P) et (F ; F)
- L'événement E possède 3 issues : (P ; P), (P ; F) et (F ; P)
- La probabilité que l'événement E se réalise est donc égale à $\frac{3}{4}$
- Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois « PILE » lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie



2. Calcul d'une probabilité élémentaire

G. Calcul de probabilité d'une à l'aide d'un tableau

Exemple :

Dans un groupe de TD de 25 étudiants, 14 étudiants pratiquent l'italien , 10 étudiants pratiquent l'allemand et 3 étudiants pratiquent les deux.

Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ne pratique aucune des deux langues ?

	I	$\bar{I}$	Total
A	3	7	10
$\bar{A}$	11	4	15
Total	14	11	25

Probabilité qu'un étudiant choisi au hasard ne pratique aucune des deux langues = $\frac{4}{25} = 16\%$

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

H. Calcul de probabilité : la formule de probabilité d'une réunion

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Formule du crible de Poincaré

Si A, B et C sont trois évènements quelconques, alors :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Pour un nombre fini d'évènements, il suffit de suivre le schéma de la formule précédente :

- à chaque ligne, on change de signe
- à chaque ligne, on considère des probabilités d'intersections regroupant un évènement de plus

Exemple : Écrire la formule du crible pour 4 évènements. On a :

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(B \cap C \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(A \cap B \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$$

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

H. Calcul de probabilité : la formule de probabilité d'une réunion

Exemple :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus. On considère les événements suivants :

A : « On obtient un nombre impair »

B : « On obtient un multiple de 3 »

Calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

Solution :

- $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- $A \cap B$ est l'événement élémentaire : « On obtient un 3 », donc : $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
- L'événement $A \cup B$ a donc pour probabilité : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2. Calcul d'une probabilité élémentaire

I. Calcul de la probabilité des événements incompatibles

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer. On considère les événements suivants :

A : « On tire un valet »

B : « On tire un roi »

- Calculer la probabilité de l'événement « tirer un valet ou un roi »

Solution :

- Les deux événements A et B sont incompatibles, en effet $A \cap B = \emptyset$
- On en déduit que la probabilité de l'événement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$