

TD 3 : Indépendance et probabilité conditionnelle

Exercice 1 : Une étude menée sur 867 sociétés de production françaises a révélé comment cette industrie se voyait en termes de violence télévisée et de qualité de programmes télévisés. Les résultats ont montré que 624 leaders pensaient que le nombre de violence TV avait augmenté au cours des dix dernières années, 390 pensaient que la qualité des programmes télévisés avait diminué au cours de ces dix dernières années et 234 ont répondu à la fois que le nombre de programmes violents avait augmenté et que la qualité des programmes avait diminué.

- a) Soient V l'événement " le nombre de programmes violents a augmenté" et Q l'événement "la qualité des programmes a diminué". Calculez les probabilités suivantes $P(V)$, $P(Q)$, et $P(V \cap Q)$
- b) Utilisez les probabilités trouvées dans a) pour calculer la probabilité qu'un leader fasse « au moins » l'un des deux commentaires suivants : le nombre de programmes violents a augmenté ou la qualité des programmes a diminué.
- c) Quelle est la probabilité qu'un leader ne soit d'accord avec aucun de ces deux commentaires?

Exercice 2: Une banque veut revoir sa politique de carte de crédit. Elle a constaté que par le passé, environ 5% des détenteurs d'une carte de crédit ont été insolvables et la banque a été incapable de recouvrer les soldes impayés. Par conséquent, la direction a estimé à 0,05 la probabilité qu'un détenteur d'une carte de crédit soit insolvable. La banque a également découvert que la probabilité d'oublier de régler un ou plusieurs paiements mensuels est de 0,20 pour les clients solvables. Bien entendu la probabilité d'oublier de régler un ou plusieurs paiements mensuels est de 1 pour les clients insolvable.

- a) Etant donné qu'un client a oublié d'effectuer un paiement mensuel, calculer la probabilité à posteriori que le client soit insolvable.
- b) La banque voudrait reprendre sa carte de crédit si la probabilité qu'un client soit insolvable est supérieure à 0,20. La banque devrait-elle reprendre sa carte de crédit à un client si le client oublie un paiement mensuel? Pourquoi?

Exercice 3: En DEUG de gestion on distingue deux catégories d'étudiants : les boursiers (B) et les non boursiers (NB).

Parmi ces étudiants, certains possèdent une voiture (V) et d'autres n'en possèdent pas (PV). Lorsqu'un étudiant est boursier la probabilité qu'il ait une voiture est de 0,3. Dans le cas d'un étudiant non boursier, elle est de 0,6.

Soient l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un étudiant et $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé. En DEUG, 70% des étudiants ne sont pas boursiers.

Déterminer la probabilité que l'étudiant choisi au hasard soit boursier sachant qu'il a une voiture.

Exercice 4: (Extrait du sujet de septembre 2000) Pascal et Georges ont l'habitude en fin de journée d'aller ensemble prendre un verre au bistrot. Au moment de payer, ils lancent chacun un dé. Celui qui obtient le plus petit résultat règle la note. En cas d'égalité, deux fois sur trois Pascal règle la note et une fois sur trois c'est Georges.

- 1) Quelle est la probabilité pour que Pascal règle l'addition?
- 2) Quelle est la probabilité pour que Georges perde au jeu de dé?
- 3) Sachant que Pascal a réglé l'addition, quelle est la probabilité pour que les deux lancers aient conduits au même résultat?

Exercice 5 : Une usine dispose de 4 machines A, B, C et D qui fabriquent respectivement 10, 20, 30 et 40 % de la production totale. La probabilité qu'un objet défectueux soit produit par A, B, C ou D est respectivement 0,05, 0,03 et 0,01.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- 1) E : « le produit est défectueux »
- 2) F : « le produit défectueux provient de la machine A »
- 3) G : « le produit non défectueux provient de la machine C »

Exercice 6 : Dans un QCM, un candidat doit cocher une réponse parmi $m=10$ réponses possibles. Sachant qu'il a la probabilité $p=0,3$ de connaître la réponse et que s'il l'ignore il répond au hasard. Quelle est la probabilité d'un candidat ayant répondu correctement à une question connaisse la réponse.

Exercice 7 : Quatre personnes se retrouvent pour jouer aux cartes. Un jeu de 32 cartes est distribué entre ces 4 joueurs.

On s'intéresse à la main d'un seul joueur

- Quelle est la probabilité que ce joueur obtienne 8 cartes de la même couleur ?
- Quelle est la probabilité que ce joueur obtienne 2 reines, 3 neuf et 1 as ?
- Quelle est la probabilité que ce joueur ait deux cartes de chaque couleur ?
- Quelle est la probabilité pour que si un joueur possède 4 cartes de pique, un des 3 autres joueurs ait 4 autres piques ?

Exercice 8 : Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a deux faces noires, un autre a deux faces blanches et le troisième a une face blanche. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait deux faces noires

Exercice 9: (Extrait sujet juin 2010) Une entreprise confie à une société de sondage une enquête par téléphone sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à interroger. La probabilité pour que le correspondant soit absent lors du premier contact téléphonique est de 0,6. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est de 0,1.

- On note : A_1 l'événement « la personne est absente lors du premier appel »
 R_1 l'événement « la personne accepte de répondre lors du premier contact téléphonique »
 Quelle est la probabilité de R_1 ?

- Lorsqu'une personne est absente lors du premier contact on la recontacte une deuxième fois à une heure différente, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est de 0,3. Sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est de 0,2.

Si une personne est absente on ne tente plus de la contacter.

On note A_2 l'événement « la personne est absente lors du second appel »

R_2 l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel »
 R l'événement « la personne accepte de répondre au questionnaire. »

Calculer la probabilité de R .

- Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?
- On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de vingt personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des vingt personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire.

Exercice 10 : (Extrait du sujet de juin 2007) Une compagnie d'assurance automobile a classé ses assurés en trois classes de revenus :

Classe 1 : Revenu inférieur à 1500 euros

Classe 2 : Revenu compris entre 1500 et 3000 euros

Classe 3 : Revenu supérieur à 3000 euros

Le tableau suivant donne deux informations :

- La proportion d'assurés appartenant à chaque classe
- La probabilité qu'un assuré, d'une classe donnée, déclare au moins un accident au cours d'une année (estimation à partir d'études statistiques des années précédentes).

Classe	Proportion	Probabilité
1	0.25	0.12
2	0.53	0.06
3	0.22	0.09

CORRECTION TD 3

J. Salvatore

Exercice 3.1:

867 : 624 $\uparrow$ V 234 $\uparrow$ Q $\downarrow$

$$a) P(V) = \frac{624}{867}, \quad P(Q) = \frac{390}{867}, \quad P(V \cap Q) = \frac{234}{867}$$

$$b) P(V \cup Q) = P(V) + P(Q) - P(V \cap Q) = \frac{624 + 390 - 234}{867} = \frac{780}{867}$$

$$c) P(\bar{V} \cap \bar{Q}) = P(\overline{V \cup Q}) = 1 - P(V \cup Q) = \frac{87}{867}$$

Exercice 3.2: S: Client solvable $\bar{S}$: insolvable O: oublier de régler

$$P(\bar{S}) = 0,05 \quad P(O|S) = 0,2 \quad P(O|\bar{S}) = 1$$

$$a) P(\bar{S}|O) = \frac{P(\bar{S})P(O|\bar{S})}{P(S)P(O|S) + P(\bar{S})P(O|\bar{S})} = \frac{0,05 \times 1}{0,05 \times 1 + 0,95 \times 0,2} = \frac{0,05}{0,24}$$

$$= \frac{5}{24} = 0,208$$

$$b) P(\bar{S}|O) = 0,208 > 0,20 \quad \text{La banque devrait retirer la carte!}$$

Exercice 3.3: B = Boursier $\bar{B}$ = NB., V = voiture $\bar{V}$ = PV

$$P(V|B) = 0,3 \quad P(V|\bar{B}) = 0,6 \quad P(NB) = 0,7$$

$$P(B|V) = \frac{P(B)P(V|B)}{P(B)P(V|B) + P(NB)P(V|\bar{B})} = \frac{0,3 \times 0,3}{0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,6} = \frac{0,09}{0,09 + 0,42}$$

$$P(B|V) = \frac{9}{51} = 0,176$$

Rappel de cours : Indépendance en Proba. Proba conditionnelles.

- A et B sont P.-indép. si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont k à k P.-indép. si $\forall i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$
$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$$
- $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement P.-indép. si $\forall k \in \{2, \dots, n\}$, ils sont P.-indép.
- $P_A: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$
 $\mathcal{B} \longmapsto P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad A/P(A) \neq 0.$
- $P(A \cap B) = P(A) P_A(B) [= P_B \cdot P_B(A)].$
- Formule de Bayes: $A_1, A_2, \dots, A_n$ n'événements deux incompatibles
e.g. $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$
alors $\forall B \in \mathcal{B}, P(B) \neq 0$, on a
$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j) P_A(B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B)}$$

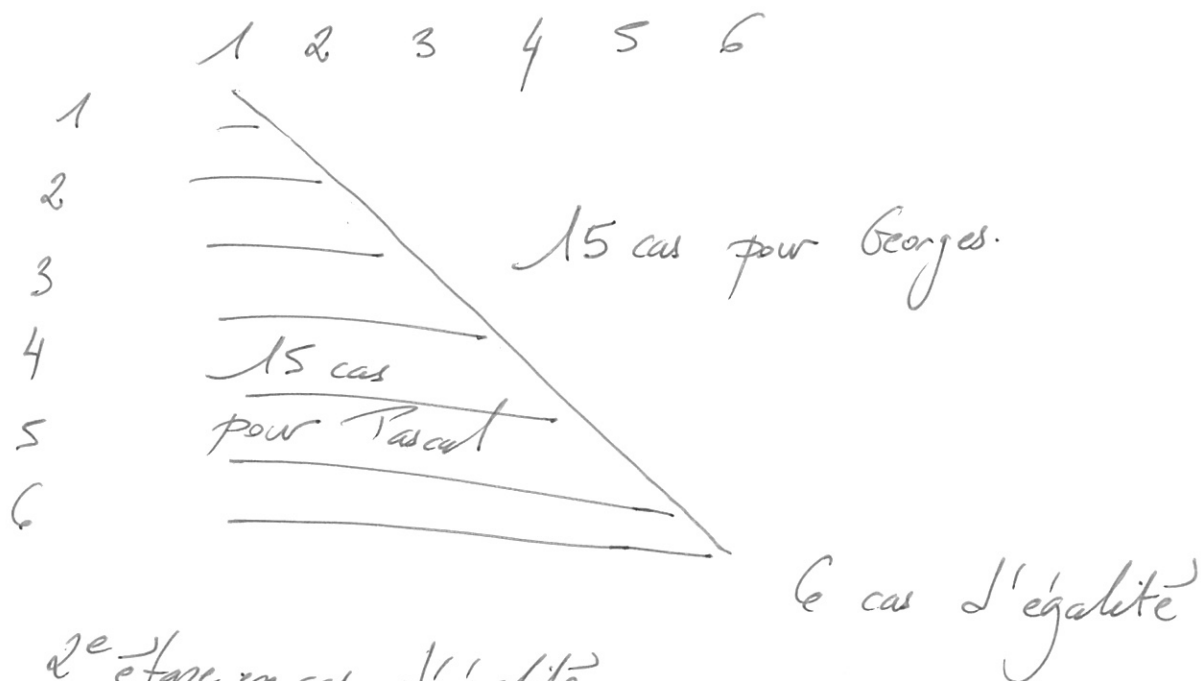
Exercice 3.4.

Pascal (P) et Georges (G); en cas d'égalité

$\frac{2}{3}$ P et $\frac{1}{3}$ G règle l'addition.

1) 1^{er} étape: P perd au d^é. On est en cas d'égalité.

$$P(\text{P perd au d^é}) = 15/36$$



2^e étape en cas d'égalité :

$$P(\text{'égalité'}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{Pascal règle}) = \frac{15}{36} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{15}{36} + \frac{4}{36} = \frac{19}{36}$$

$$2) P(\text{G perd au d^é}) = \frac{15}{36}$$

$$3) P(\text{'égalité' | P règle}) = \frac{P(\text{'égalité'}) \times P(\text{P règle | 'égalité'})}{P(\text{P règle})}$$

$$= \frac{\frac{6}{36} \times \frac{2}{3}}{\frac{19}{36}} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{2}{3}}{\frac{19}{36}} = \frac{2/18}{19/36} = \frac{4}{19}$$

Exercice 3.5: $P(A)=0,1$; $P(B)=0,2$; $P(C)=0,3$; $P(D)=0,4$

$\mathcal{D}$: "Produit défectueux" $P(\mathcal{D})=0,06$; $P(\bar{\mathcal{D}})=0,05$
 $P(\mathcal{D})=0,03$ $P(\mathcal{D})=0,01$.

$$\begin{aligned} 1) P(\mathcal{E}) = P(\mathcal{D}) &= P((\mathcal{D} \cap A) \cup (\mathcal{D} \cap B) \cup (\mathcal{D} \cap C) \cup (\mathcal{D} \cap D)) \\ &= P(\mathcal{D} \cap A) + P(\mathcal{D} \cap B) + P(\mathcal{D} \cap C) + P(\mathcal{D} \cap D) \\ &= 0,1 \times 0,06 + 0,2 \times 0,05 + 0,3 \times 0,03 + 0,4 \times 0,01 \\ &= 0,006 + 0,01 + 0,009 + 0,004 = 0,029 \end{aligned}$$

$$2) P_{\mathcal{D}}(A) = \frac{P(A \cap \mathcal{D})}{P(\mathcal{D})} = \frac{P(A) P_A(\mathcal{D})}{P(\mathcal{D})} = \frac{0,1 \times 0,06}{0,029} = \frac{6}{29} \approx 0,206$$

$$\begin{aligned} 3) P_{\bar{\mathcal{D}}}(C) &= \frac{P(C \cap \bar{\mathcal{D}})}{P(\bar{\mathcal{D}})} = \frac{P(C) P_C(\bar{\mathcal{D}})}{1 - P(\mathcal{D})} = \frac{P(C) (1 - P_C(\mathcal{D}))}{1 - P(\mathcal{D})} \\ &= \frac{0,3 \times (1 - 0,03)}{0,971} = \frac{0,3 \times 0,97}{0,971} \approx 0,299 \end{aligned}$$

Exercice 3.6: C : "Connait la réponse" J : "Réponse juste"

$P(C)$?

D'après la formule de Bayes: $P_{\bar{J}}(C) = \frac{P(C) P_{\bar{C}}(\bar{J})}{P(C) P_{\bar{C}}(\bar{J}) + P(\bar{C}) P_{\bar{C}}(\bar{J})}$

$$P(J)=1, P(C)=p, P(\bar{C})=1-p, P_{\bar{C}}(J)=\frac{1}{m}$$

$$P_{\bar{J}}(C) = \frac{p}{p + (1-p) \times \frac{1}{m}} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}$$

$$A.N: P_{\bar{J}}(C) = \frac{10 \times 0,3}{1 + 9 \times 0,3} = \frac{3}{3,7} \approx 0,81081$$

Exercice 7.3

65

$$a) \quad p(A) = \frac{C_8^8}{C_{32}^8} + \frac{C_8^8}{C_{32}^8} + \frac{C_8^8}{C_{32}^8} + \frac{C_8^8}{C_{32}^8} = 4 \frac{C_8^8}{C_{32}^8} = \frac{4}{C_{32}^8}$$

$$b) \quad p(B) = \frac{C_4^2 C_4^3 C_4^1 C_{20}^2}{C_{32}^8} = \frac{6 * 4 * 4 * 190}{C_{32}^8}$$

$$c) \quad p(C) = \frac{C_8^2 C_8^2 C_8^2 C_8^2}{C_{32}^8} = \frac{28^4}{C_{32}^8}$$

- d) Soit l'événement D1 : « un joueur a 4 piques »
Soit l'événement D2 : « un autre joueur a quatre piques »

$$P(D1) = \frac{C_8^4 C_{24}^4}{C_{32}^8}$$

$$P(D2) = \frac{C_4^4 C_{20}^4}{C_{32}^8}$$

$$P(D1 \cap D2) = \frac{C_8^4 C_{24}^4}{C_{32}^8} * \frac{C_4^4 C_{20}^4}{C_{32}^8}$$

$$p(D) = p(D2/D1) = \frac{P(D1 \cap D2)}{p(D1)} = \frac{\frac{C_8^4 C_{24}^4}{C_{32}^8} * \frac{C_4^4 C_{20}^4}{C_{32}^8}}{\frac{C_8^4 C_{24}^4}{C_{32}^8}} = \frac{C_4^4 C_{20}^4}{C_{32}^8}$$

Exercice 8.3

NN: "deux faces noires"

NB: "une face noire" et une face blanche"

BB: "deux faces blanches"

$P(NN) = P(NB) = P(BB) = 1/3$

$P(N/NN) = 1$ $P(N/NB) = 1/2$ $P(N/BB) = 0$

On applique la formule de Bayés au système complet d'événements de probabilités non nulles { NN, NB, BB }:

$$P(N/NN) = \frac{P(N/NN) * P(NN)}{P(N/NN) * P(NN) + P(N/NB) * P(NB) + P(N/BB) * P(BB)} = \frac{\frac{1}{3} * 1}{\frac{1}{3} * 1 + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} * 0} = \frac{2}{3}$$

TD 3/c

Exercice 3.9: Enquête sur la qualité des produits:

A_1 : Personne absente lors du 1^{er} appel.

R_1 : Personne accepte de répondre lors du 1^{er} contact tel.

1) quelle est la probabilité de R_1 ?

D'après l'énoncé: $P(A_1) = 0,6$ $P_{\bar{A}_1}(R_1) = 0,1$

Comme la personne ne peut répondre que si elle est présente, on a $R_1 = R_1 \cap \bar{A}_1$

$$P(R_1) = P(\bar{A}_1) \times P_{\bar{A}_1}(R_1)$$

$$P(R_1) = (1 - 0,6) \times 0,1 = 0,04$$

$$P(R_1) = 0,04$$

2) La personne est contactée 2 fois. Elle peut répondre au questionnaire lors du 1^{er} appel ou lors du 2^e appel.

$$P(R) = P(R_1 \cup R_2)$$

or R_1 et R_2 sont incompatibles 2 à 2.

$$P(R) = P(R_1) + P(R_2) \text{ or } P(R_1) = 0,04$$

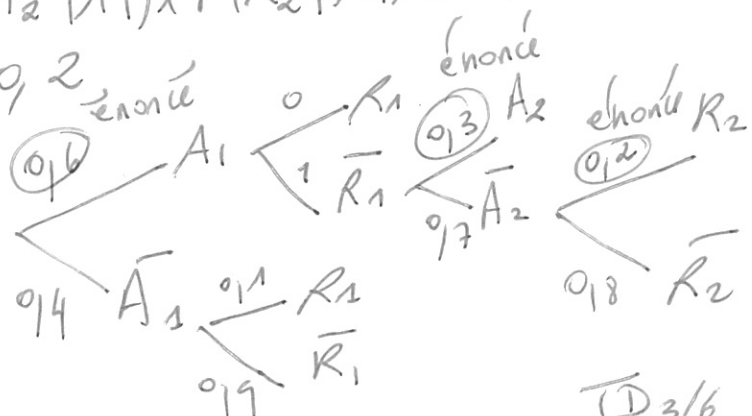
La personne ne répond au questionnaire au 2^e appel dans le cas où elle a été absente au 1^{er} appel, présente au 2^d appel où elle a alors accepté de répondre au questionnaire:

$$\begin{aligned} \text{Donc } P(R_2) &= P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap R_2) \\ &= P(A_1) \times P(\bar{A}_2 | A_1) \times P(R_2 | A_1 \cap \bar{A}_2) \\ &= 0,6 \times 0,7 \times 0,2 \end{aligned}$$

$$P(R_2) = 0,084$$

$$\text{Donc } P(R) = 0,04 + 0,084$$

$$\boxed{P(R) = 0,124}$$



Ex 9. (suite)

3) Sachant qu'une personne accepte de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du 1^{er} appel:

$$P(R_1|R) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)} \quad \text{or } R_1 \cap R = R_1$$

$$= \frac{P(R_1)}{P(R)} = \frac{0,04}{0,124} \approx 0,322.$$

$$P(R_1|R) = \frac{P(R_1)}{P(R)} \approx 0,322$$

Exercice 3.10:

1) A: Déclare au moins 1 accident

A_i : Déclare au moins 1 accident et $\in C_i$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + P(A \cap C_3) \\ &= P(C_1)P(A) + P(C_2)P(A) + P(C_3)P(A) \\ &= 0,25 \times 0,12 + 0,53 \times 0,06 + 0,22 \times 0,05 = 0,0816 \end{aligned}$$

$$2) P(C_1|A) = \frac{P(C_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C_1)P(A)}{P(A)} = \frac{0,25 \times 0,12}{0,0816} = \frac{300}{816} \approx 0,37$$

$$\begin{aligned} 3) P(A|C_2 \cup C_3) &= \frac{P(A \cap (C_2 \cup C_3))}{P(C_2 \cup C_3)} = \frac{P[(A \cap C_2) \cup (A \cap C_3)]}{P(C_2 \cup C_3)} = \frac{P(A \cap C_2) + P(A \cap C_3)}{P(C_2) + P(C_3)} \\ &= \frac{P(C_2)P(A) + P(C_3)P(A)}{P(C_2) + P(C_3)} = \frac{0,53 \times 0,06 + 0,22 \times 0,05}{0,53 + 0,22} = \frac{0,0516}{0,75} \approx 0,0688 \end{aligned}$$

Ex. 10 (suite)

$$4) P(\bar{C}_2 | \bar{A}) = \frac{P(\bar{C}_2) P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(C_1 \cup C_3) [1 - P(A)]}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{P(C_1) + P(C_3) [1 - P(A)]}{1 - P(A)}$$

or $P(A)_{C_2} = \frac{P(A \cap \bar{C}_2)}{P(\bar{C}_2)} = \frac{P[A \cap (C_1 \cup C_3)]}{1 - P(C_2)} = \frac{P(A \cap C_1) + P(A \cap C_3)}{1 - P(C_2)}$

$$= \frac{P(C_1) P(A)_{C_1} + P(C_3) P(A)_{C_3}}{1 - P(C_2)}$$

Donc $P(\bar{C}_2 | \bar{A}) = \frac{P(C_1) + P(C_3)}{1 - P(A)} \left[\frac{1 - P(C_1) P(A)_{C_1} - P(C_3) P(A)_{C_3}}{1 - P(C_2)} \right]$

$$= \frac{P(C_1) P(A)_{C_1} + P(C_3) P(A)_{C_3}}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - P(C_2) - P(C_1) P(A)_{C_1} - P(C_3) P(A)_{C_3}}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{1 - 0,53 - 0,25 \times 0,12 - 0,22 - 0,09}{1 - 0,816}$$

$$= \frac{0,4202}{0,184} \approx 0,457$$