

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f .
- 2) Déterminer la fonction de répartition, F , de X .
- 3) Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, et la variance, $V(X)$, de X .

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > k \\ 1 + x & \text{si } |x| \leq k \end{cases}$

où k est un paramètre strictement positif.

- 1) Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f .
- 2) Déterminer la fonction de répartition, F , de X .
- 3) Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, et la variance, $V(X)$, de X .

Exercice 3 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} k(4x - x^2) & \text{si } x \in]0, 4[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

où k est un paramètre strictement positif.

- 1) Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f .
- 2) Déterminer la fonction de répartition, F , de X .
- 3) Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, et la variance, $V(X)$, de X .

Exercice 4 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f .
- 2) Déterminer la fonction de répartition, F , de X .
- 3) Calculer l'espérance mathématique, $E(X)$, et la variance, $V(X)$, de X .

Rappel de Cours

• f est une densité de proba sic, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

$$\begin{aligned} \bullet E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \bullet V(X) &= E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 \\ & & &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

• Fonction de répartition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



Ex 1.6

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (si $x > 0$, $f(x) = e^{-x} > 0$ et si $x \leq 0$, $f(x) = 0 \geq 0$!)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} + e^0 \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1. \end{aligned}$$

De f est une densité de proba.

$$2) F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$\text{Si } x \in]-\infty, 0], \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

$$\text{Si } x \in]0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$$\text{(Rq: } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1)$$

3) • $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$. on pose $u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$
 $v(x) = -e^{-x} \leftarrow v'(x) = e^{-x}$

$$= \left[-x e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} + \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} + e^0$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right)$$

• $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 1^2$

• $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx =$ on pose $u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x$
 $v(x) = -e^{-x} \leftarrow v'(x) = e^{-x}$

$$= \left[-x^2 e^{-x} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} + 2 \left(\text{Car } \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1 \right)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + 2 = 2 \quad \text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} V(X) = 2 - 1 = 1$$



Ex 2.6: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > k \\ 1+x & \text{si } |x| \leq k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}_+^*.$

1) f est une densité de proba si $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-k}^k (1+x) dx = \left[x + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-k}^k = k + \frac{1}{2} k^2 - \left(-k + \frac{1}{2} k^2 \right) = 2k$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \\ 1+x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|x| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x+1 \leq \frac{3}{2}$$

Donc $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

2) $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

• Si $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}]$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$

• Si $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} 0 dt + \int_{-\frac{1}{2}}^x (1+t) dt = \left[t + \frac{1}{2} t^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^x$

$$= x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{3}{8}$$

Si $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ $F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+t) dt = 1.$

4.6

$$3) \cdot E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(1+x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x+x^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2(1+x) dx - \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^2 + x^3) dx - \frac{1}{12^2} = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \frac{1}{16} - \frac{1}{12^2} =$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{12^2} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12^2}$$

Ex 3.6

$$f(x) = \begin{cases} k(4x - x^2) & \text{si } x \in]0, 4[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^4 k(4x - x^2) dx = k \int_0^4 (4x - x^2) dx = k \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 \\ = k \left(2 \times 4^2 - \frac{1}{3} \times 4^3 \right) = k \times 4^2 \left(1 - \frac{2}{3} \right) = k \frac{32}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{3}{32}}$$

$$4x - x^2 = x(4 - x) \quad \begin{array}{c} 0 \quad 4 \\ - \quad + \quad - \end{array} \rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$\bullet \text{ Si } x \in]-\infty, 0], F(x) = 0$$

$$\bullet \text{ Si } x \in]0, 4[, F(x) = \frac{3}{32} \int_0^x (4t - t^2) dt = \frac{3}{32} \left[2t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x = \frac{3}{32} x^2 \left(2 - \frac{1}{3}x \right) \\ = \frac{1}{32} x^2 (6 - x)$$

$$\bullet \text{ Si } x \in [4, +\infty[, F(x) = \frac{3}{32} \int_0^4 (4t - t^2) dt = 1.$$

$$\begin{aligned}
 3) \cdot E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{3}{32} \int_0^4 x(4x - x^2) dx = \frac{3}{32} \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx \quad (6.6) \\
 &= \frac{3}{32} \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^4 = \frac{3}{32} \left(\frac{4^4}{3} - \frac{4^4}{4} \right) = \frac{3}{32} 4^3 \left(\frac{4}{3} - 1 \right) \\
 &= 5 \frac{1}{3} = 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 4 = \frac{3}{32} \int_0^4 x^2(4x - x^2) dx - 4 \\
 &= \frac{3}{32} \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx - 4 = \frac{3}{32} \left[x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^4 - 4 \\
 &= \frac{3}{32} 4^4 \left(1 - \frac{4}{5} \right) - 4 = 3 \times 8 \frac{1}{5} - 4 = \frac{24}{5} - 4 = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

EX 6.4:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

7.6

1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2} \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(e^0 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \right) - \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - e^0 \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2) $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

• si $x \in]-\infty, 0]$, $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^t dt = \left[\frac{1}{2} e^t \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = \frac{1}{2} e^x.$

• si $x \in]0, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t} dt$
$$= \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} \left[-e^{-t} \right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-e^{-x} + e^0)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^{+\infty} x \frac{1}{2} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx
 \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx \quad \text{in part} \quad \left| \begin{array}{l} u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \leftarrow v'(x) = e^x \end{array} \right.$$

$$= \left[x e^x \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^x dx = - \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x - \left[e^x \right]_{-\infty}^0 = - \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} - e^0 + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - 1 = -1.$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \quad \text{in part} \quad \left| \begin{array}{l} u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \leftarrow v'(x) = e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= \left[-x e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} + \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + e^0$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = 1$$

$$\text{DC} \quad E(X) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

$$\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx \quad \text{on pose } \begin{cases} u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \leftarrow v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$= \left[x^2 e^x \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 2x e^x dx = - \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x - 2 \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + 2 \quad (\text{car } \int_{-\infty}^0 x e^x dx = -1)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + 2 = 2.$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \quad \text{on pose } \begin{cases} u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-x} \leftarrow v'(x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$= \left[-x^2 e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-x} dx = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \dots = 2$$

$$\text{Donc } V(X) = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 = 2$$

FIN