UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE

UFR de GESTION

Examen de Mathématiques

LICENCE 2ème année

JANVIER 2019, Durée : 1h30

Documents, calculatrices, téléphones portable ou lecteurs mp3 interdits. Justifiez tous les résultats. Soyez clair(e) et précis(e). Le barème est donné à titre indicatif.

I Système récurrent (7,5 points)

On étudie le modèle suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -y_n - z_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n \end{cases}$$

a) Diagonalisez la matrice A du **système homogène** (On triera les valeurs propres par ordre croissant, on fera les vérifications usuelles et on construira les vecteurs propres toujours **en utilisant les dernières variables comme paramètres** dans la résolution du système, ensuite on fera en sorte que la première composante non nulle soit 1 pour les vecteurs propres, on justifiera bien si la matrice est diagonalisable ou pas, on calculera P^{-1}).

b) Donner les solutions explicites du **système homogène** en fonction de paramètres.

c) Calculez les précédents paramètres en fonction des conditions initiales x_0, y_0 et z_0.

d) On suppose maintenant que le système a un second membre. On a donc $X_{n+1} = A.X_n + B$ où $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Déterminez le ou les points stationnaires de ce **système**.

e) Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (On fera le calcul complet).

II Approximation (4,5 points)

Soit $f(x,y) = x^2y - ye^{xy} - x^2 + 1 + xy$

a) Calculez les dérivées premières et les dérivées secondes.

b) Rappelez la formule d'un développement limité à l'ordre 2 d'une fonction de plusieurs variables en un point (a,b).

c) En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0;0)$.

d) En déduire une valeur approchée de f en $(0.2;0.1)$.

e) Donnez l'équation du plan tangent à f en $(0;1)$

III Optimisation(6 points)

On cherche à optimiser la fonction suivante :
$f(x,y,z) = 2x^2 + (1+z)x + y^2$
sous les contraintes $5x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et $z + 2x = 0$

a) Formulez un problème simplifié équivalent puis montrez que l'on peut utiliser la méthode du lagrangien.

Pour la suite on ne s'occupera plus que du problème simplifié et on omettra donc la conclusion finale avec retour sur le problème initial.

b) Déterminez les points candidats du problème simplifié.

c) Déterminez la nature des points candidats pour le problème simplifié.

d) Quel est le maximum global et le minimum global du problème simplifié (justifiez) ?

IV Question de cours (2 points)

Soit $u : E \to F$ une application linéaire bijective.

Après avoir rappelé la définition d'une application linéaire, démontrez que la bijection réciproque u^{-1} est, elle aussi, une application linéaire.