Ex 1 : Étude de suites

(a) $u_{n+1} = (u_n+6)^{1/3}$, $u_0 = 3$.

- Signe de u_n :

  On va démontrer que $u_n > 0$.

  À l'ordre 0, c'est vrai car $u_0 = 3 > 0$.

  Supposons que $u_n > 0$ au rang n. $\Rightarrow u_n > 0$

  Au rang $n+1$, nous avons $u_{n+1} = (u_n+6)^{1/3}$
  $= \sqrt[3]{u_n+6}$

Or, on sait qu'au rang n $u_n > 0 \Rightarrow u_n + 6 > 6 > 0$
$\Rightarrow (u_n+6)^{1/3} > 0$, vérifié au rang $n+1$

$\Rightarrow \forall n,\ u_n > 0$.

- Signe $u_{n+1} - u_n$.

  Étudions le signe de $u_{n+1}^3 - u_n^3$:

  $$u_{n+1}^3 - u_n^3 = \left((u_n+6)^{1/3}\right)^3 - u_n^3 = u_n + 6 - u_n^3 = -(u_n^3 - u_n - 6).$$

Nous allons maintenant étudier le polynôme $u_n^3 - u_n - 6$ pour déterminer son signe. Une racine évidente de ce polynôme est 2.

$$\Rightarrow u_n^3 - u_n - 6 = (u_n - 2)(a u_n^2 + b u_n + c)$$
$$= a u_n^3 + (b-2a) u_n^2 + (c-2b) u_n - 2c.$$

Nous identifions a, b, c :

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b - 2a &= 0 \\ c - 2b &= -1 \\ -2c &= -6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_n^3 - u_n - 6 = \underbrace{(u_n - 2)}_{A(u_n)} \underbrace{(u_n^2 + 2u_n + 3)}_{B(u_n)}.$$

• Signe de $B(u_n)$:

Calcul du discriminant de $B(u_n)$, $\Delta(B(u_n)) = 2^2 - 4(1)(3) = -8 < 0$

Pas de racines réelles $\Rightarrow$ $B(u_n)$ du signe du coefficient devant u_n^2. Ici, $1 > 0$.

ou

$B(u_n)$ est dérivable au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.

$B'(u_n) = 2u_n + 2 \Rightarrow u_n = -1$ à l'extremum.

$B(-1) = 1$

$B''(u_n) = 2 > 0$ (convexe) $\Rightarrow$ B admet un minimum en $u_n = -1$.

$\Rightarrow B(u_n) \geq 1$ partout, donc $B(u_n) > 0$.

• Signe de $A(u_n)$:

$A(u_n) = u_n - 2$.

Au tout début, nous avons démontré que $u_n > 0$. Nous allons maintenant démontrer qu'en fait u_n est même > 2 $\forall n$, par récurrence :

À l'ordre 0, $u_0 = 3 > 2$. Donc c'est vrai

Supposons la récurrence vraie au rang $n \Rightarrow u_n > 2$.

Au rang $n+1$, $u_{n+1} = (u_n + 6)^{1/3} > (2+6)^{1/3}$ car $u_n > 2$

$> 8^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2$.

$\Rightarrow u_{n+1} > 2$.

$\forall n$, $u_n > 2 \Rightarrow u_n - 2 > 0$.

$\Rightarrow u_n^3 - u_n - 6 = A(u_n)\,B(u_n) > 0$.

De ce fait, $u_{n+1}^3 - u_n^3 = -(u_n^3 - u_n - 6) < 0$

$u_{n+1}^3 < u_n^3$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$.

$u_{n+1} - u_n < 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. De plus, nous avons démontré que $u_n > 2 \Rightarrow$ Suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée $\Rightarrow$ suite convergente.

* Calcul du point fixe, l.

$$l = f(l) \Rightarrow l = (l+6)^{1/3}$$

$$f(x) = (x+6)^{1/3}$$

$$\Rightarrow l^3 = l+6$$

$$l^3 - l - 6 = 0$$

$$(l-2)\underbrace{(l^2+2l+3)}_{} = 0.$$

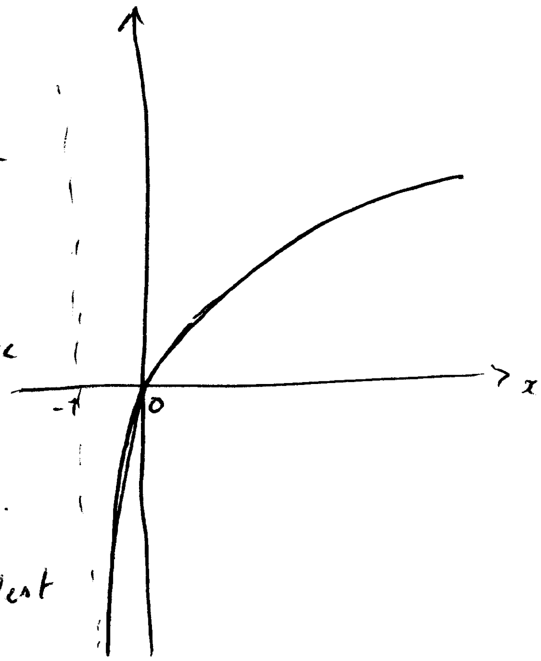
$\Delta < 0$ comme vu précédemment $\Rightarrow$ pas de racine réelle

Donc $l = 2$.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

(b) $U_{n+1} = \ln(1+U_n)$, $U_0 \in \mathbb{R}_+$

Soit $f(x) = \ln(1+x)$. Graphiquement,



U_0 étant $\in \mathbb{R}_+ \Rightarrow$ on s'intéresse à la partie de la courbe sur le domaine $x > 0$.

De plus, ln est une fonction croissante sur son domaine de définition.

- Nous allons démontrer que $u_n > 0$ $\forall n$.

Au rang 0, $U_0 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow u_0 > 0$. Donc, c'est ok.

Supposons, la récurrence vraie au rang $n \Rightarrow u_n > 0$.

Au rang $n+1$, $U_{n+1} = \ln(1+U_n)$. Or $U_n > 0$, $1+U_n > 1 > 0$ et ln étant croissante $\Rightarrow U_{n+1} = \ln(1+U_n) > 0$ si $1+U_n > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$, et f étant croissante U_n est monotone.

- Signe de $U_{n+1} - U_n$:

$$U_{n+1} - U_n = \ln(U_n+1) - U_n$$

On pose $g(x) = \ln(1+x) - x$.

$g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+ \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$.
x étant $\in \mathbb{R}_+$ $(u_n > 0)$, $\Rightarrow \frac{1}{1+x} < 1$. Donc, $g'(x) < 0$ car $g(0) = 0$ et g' est décroissante.

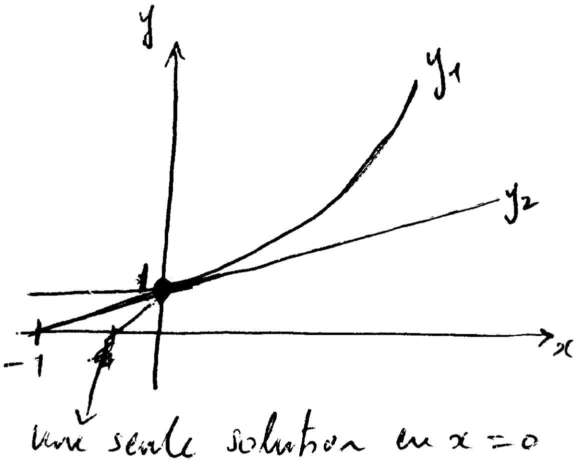
$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et elle est minorée par 0. C'est donc une suite convergente.

• <u>Recherche du point fixe, l.</u>

$$l = f(l) \Rightarrow l = \ln(1+l)$$
$$\underbrace{e^l}_{y_1} = \underbrace{1+l}_{y_2}$$

$\Rightarrow l = 0$.



<u>$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0</u>

<u>Ex 3.</u>

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n + 1}{u_n}, \quad u_0 = a.$$

(a) On veut montrer que u_n est définie pour $\forall a \in \mathbb{R}^*$ $(a \neq 0 ; a \in \mathbb{R})$
On ~~pose~~ sait que pour que la suite soit définie $\forall n \in \mathbb{N}$, il faut que $u_n \neq 0$ car c'est le terme du dénominateur.
Par récurrence : au rang 0, $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$. Donc, c'est OK.
Supposons la récurrence vraie au rang n, $u_n \neq 0$.
Au rang $n+1$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 1}{u_n}$.
Pour le dénominateur, c'est OK car $u_n \neq 0$.
Pour le numérateur, il faut démontrer que $u_n^2 - u_n + 1$ ne s'annule jamais, autrement dit n'a pas de racine (réelle).

$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0 \Rightarrow u_n^2 - u_n + 1$ ne s'annule pas.

$\Rightarrow$ Au rang $n+1$, $u_{n+1} \neq 0$. $\Rightarrow$ <u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie</u>

(b). On va maintenant montrer par récurrence que si
$\boxed{a < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n < -n}$

Au rang 0, $u_0 = a < 0$ (hypothèse de départ), donc c'est OK.
On suppose la récurrence vraie au rang $n \Rightarrow u_n < -n$.
De ce fait, au rang $n+1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - u_n + 1}{u_n}$.

Je peux diviser car $u_n < -n$ (strictement inférieur) et $u_0 < 0$.

$$\Rightarrow u_{n+1} = \underbrace{\underbrace{u_n}_{<-n} - 1}_{<-n-1} + 1/u_n.$$

Or $u_n < -n < 0 \Rightarrow 1/u_n < 0$.

$\Rightarrow -n-1+1/u_n < 0$.

$\Rightarrow -n-1 < 0$.

$\Rightarrow u_{n+1} < -n-1$

$u_{n+1} < -(n+1) \longrightarrow$ OK.

Donc, si $a < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < -n$.

La suite $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$.
$u_n < -n \Rightarrow u_n$ est divergente vers $-\infty$ aussi.

c). Soit $f(x) = x - 1 + 1/x$. Tableau de variation + graphe de f ?
On étudie f sur $\mathbb{R}_+^*$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f'(x) = 1 - 1/x^2$.

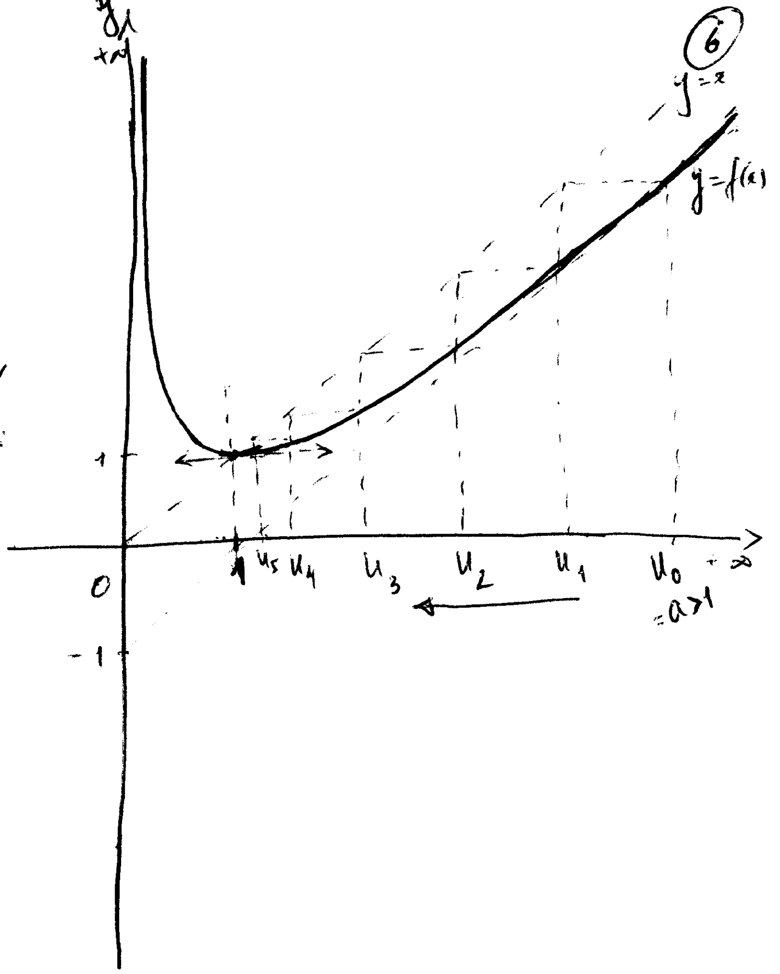
f' s'annule si $1 - 1/x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. On ne s'intéresse qu'à $x = 1$ car $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

$f(1) = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (terme en $1/x$ qui domine) — Rappel : croissances comparées.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (dominance du terme en x).

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Par le graphe, position de $f(x)$ par rapport à la 1ère bissectrice $y=x$:

$f(x)-x = x-1+\frac{1}{x}-x = -1+\frac{1}{x}$

$= -\frac{(x-1)}{x}$.

- $x>1 \Rightarrow f(x)-x<0$
  f en dessous de $y=x$.
- $x<1 \Rightarrow f(x)-x>0$.
  f au dessus de $y=x$

(d). Étude de la convergence de u_n lorsque $a>1$.

Sur la courbe, si $a>1$, c'est à dire $u_0>1$, la suite décroît et tend vers 1. On va le démontrer:

Dans ce cas, $f(I)\subset I$ avec $I=[1,+\infty[$. f_I est croissante sur $I \Rightarrow u_n$ est monotone

Signe de $u_{n+1}-u_n$:

$u_{n+1}-u_n$ est du même signe que u_1-u_0.

$u_1-u_0 = u_0-1+\frac{1}{u_0}-u_0 = \frac{1}{u_0}-1$.

$u_0=a>1 \Rightarrow \frac{1}{u_0}<1 \Rightarrow \frac{1}{u_0}-1<0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante comme constaté sur la courbe de f et elle est minorée par 1 (car $f(I)\subset I$). La suite converge.

Recherche du point fixe :

$$l=f(l) \Rightarrow l = l-1+\frac{1}{l} \Rightarrow l=1.$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\underset{\ell}{1}$ si $a>1$.

(e) Étude de la stabilité locale autour de $e = 1$.

On calcul $|f'(1)| = \left|1 - \frac{1}{x^2}\right|_{x=1} = 0 < 1$.

$|f'(1)| < 1 \Rightarrow$ l'équilibre est stable autour de 1.

(f) u_n converge quand $0 < a < 1$.
↳ vers 1

Si $0 < a < 1$ ou encore $0 < u_0 < 1$, alors $u_1 = f(u_0) > 1$ car sur $]0,1]$, f est au-dessus de la 1ère bissectrice $y = x$. À partir du u_1, on retombe dans l'intervalle I étudié précédemment et où l'on avait démontré que la suite était convergente vers 1.

(g) Ensemble de stabilité de e.

L'ensemble de stabilité est l'ensemble des valeurs initiales telles que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

La disjonction des cas est comme suit :

- $a < 0$: la suite diverge vers $-\infty$ (question (b))
- $a = 0$: la suite n'est pas définie (question (a))
- $a \in]0,1[$: la suite converge vers 1. (question (f))
- $a > 1$: la suite converge vers 1 (question (d)).

Conclusion : $\mathcal{S}(e)$ = l'ensemble des points initiaux tels que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge
$=]0, +\infty[$

Ex 2

À l'équilibre, on a les relations suivantes qui sont vérifiées :

$$\begin{cases} D_t = S_t \\ D_t = 15 - 1{,}5\, P_t \\ S_t = P_{t-1} - 3 \end{cases}$$ (changement d'indice $t+1 \to t$)

Donc, $15 - 1{,}5\, P_t = P_{t-1} - 3 \Rightarrow \frac{3}{2} P_t = 18 - P_{t-1} \Rightarrow P_t = 12 - \frac{2}{3} P_{t-1}$

A l'équilibre, $P_t = P_{t-1} = P_{eq} \Rightarrow P_{eq} = 12 - \frac{2}{3} P_{eq}$

$$P_{eq} = 36/5.$$

La quantité vendue sur le marché est alors :

$$Q_{eq} = 15 - 1{,}5 \times 36/5 = 4{,}2.$$

Étude de la stabilité de l'équilibre ⇒ on calcule l'écart entre P_t et P_{eq}.

$$P_t - P_{eq} = 12 - \frac{2}{3} P_{t-1} - \left(12 - \frac{2}{3} P_{eq}\right) = -\frac{2}{3}\left(P_{t-1} - P_{eq}\right).$$

On pose $d_t = P_t - P_{eq} \Rightarrow d_t = -\frac{2}{3} \cdot d_{t-1}$.

On reconnaît que d_t est une suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ ⇒ $d_t = \left(-\frac{2}{3}\right)^t (P_0 - P_{eq})$.

Or $\lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^t = 0$. L'équilibre est donc stable.

OU

$P_t = 12 - \frac{2}{3} P_{t-1} = f(P_{t-1})$ en posant $f(x) = 12 - \frac{2}{3}x$.

$f'(x) = -\frac{2}{3} \Rightarrow |f'(P_{eq})| = \frac{2}{3} < 1$.

On arrive à la même conclusion : l'équilibre est stable.