UNIVERSITE PARIS 1 - UFR de GESTION
Thème 4
Optimisation
Licence 2ème année

Exercice 1 :

On suppose que C est une fonction de coût telle que : $C(X) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$

où X représente le vecteur (x, y, z) . On notera A la matrice associée à la forme quadratique $C(X)$. Soient $W_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que les vecteurs W_2 et W_3 sont orthogonaux.

b) La matrice A est elle diagonalisable ?

c) Déterminer ses valeurs propres par ordre croissant.

d) Déterminez des vecteurs propres V_1 V_2 et V_3 tels que :

- la dernière composante de chaque vecteur soit 1.

- les vecteurs propres soient 2 à 2 orthogonaux

e) En déduire le noyau de l'application linéaire que la matrice A représente, puis le rang de A.

f) Déterminer la matrice P orthonormée telle que $A = P.D.P^{-1}$ où D est la matrice diagonale.

g) Déterminer les composantes f_i du vecteur telle que $C(X) = \sum \lambda_i f_i^2$

h) En déduire la nature de la forme quadratique C.

i) Déterminer les points candidats à l'optimum pour C ainsi que leur nature.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2 + x - 2y$

a) f est elle de classe C^∞ sur R^2 ?

b) Calculer les dérivées premières de f.

c) Calculer les dérivées secondes de f.

d) Former la matrice hessienne de f, f est elle convexe ou concave sur R^2 ?

Exercice 3 :

Rechercher les extrema des fonctions suivantes :

a) $f_1(x, y) = xy - x^2 - y^2$

b) $f_2(x, y) = xy - \ln(x^2 + y^2)$

c) $f_3(x, y) = y^4 + x^2 - 2y^2$

Exercice 4 :

Soit $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

a) Déterminez les extrema de f.
b) Les solutions trouvées sont elles des solutions globales du problème ?

Exercice 5 :

Un portefeuille peut être constitué d'actions A ou B en proportions respectivement a et b. L'espérance de rentabilité du portefeuille est alors :
$R = -2,5a^2 - 10b^2 + 10a + 20b$
Déterminer les proportions optimales qui maximise l'espérance de rentabilité.

Exercice 6 :

Soit $f(x, y, z) = z$

a) Optimiser f sous les contraintes : $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

b) Optimiser f sous les contraintes : $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2 \\ x + y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Exercice 7 :

Résoudre l'optimisation suivante :
— $\max\limits_{x,y} x^2 - y^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$