

Il est demandé de rédiger proprement.

Lisez bien l'énoncé, on justifiera clairement chaque réponse.

Exercice 1 : Développement limité

Soit $f(x, y) = e^{x^2(1-y)}$ une fonction de 2 variables définies sur $\mathbb{R}^2$.

1. Donnez la formule du développement limité de f à l'ordre 2 en (a, b) .
2. Calculez le développement limité de f à l'ordre 2 en $(1, 1.1)$.
3. En calculant $f(1, 1)$ de deux façons différentes, estimez $\exp(0.1)$.

Exercice 2 : Equation de récurrence

Soit la suite définie par $\frac{1}{2}U_{n+2} + \sqrt{3}U_{n+1} + 2U_n = n + 3^n$

1. Ecrire l'équation homogène associée.
2. Trouvez la solution générale de l'équation homogène.
3. Trouvez les solutions particulières de l'équation en fonction des seconds membres.
4. Trouvez la solution générale de l'équation totale.

Exercice 3 : Optimisation sous contraintes

Soit $f(x, y, z) = z$, une fonction à optimiser sous les 2 contraintes suivantes :

- $2x - y - z = 0$
- $2x^2 + y^2 = 9$

1. Justifiez que ce problème est équivalent à un problème plus simple où on a une fonction $\tilde{f}$ de 2 variables à optimiser sous une seule contrainte.
2. Trouvez tous les points optimaux de $\tilde{f}$ ainsi que leurs natures.
3. Reportez les conclusions obtenues sur $\tilde{f}$ à la fonction $f(x, y, z)$ initiale.

Soit $f(x, y) = e^{x^2(1-y)}$

1, le développement limité en (a, b) de f à l'ordre 2 est

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x-a)(y-b)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x-a)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y-b)^2 + o((x-a)^2 + (y-b)^2)$$

2, On a $f(x, y) = e^{x^2(1-y)}$

$$f(1, 1, 1) = e^{-0,1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1-y) e^{x^2(1-y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = -0,2 e^{-0,1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 e^{x^2(1-y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = -e^{-0,1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^{x^2(1-y)} [4x^2(1-y)^2 + 2(1-y)]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1, 1) = e^{-0,1} (0,04 - 0,2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1, 1) = -0,16 e^{-0,1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^4 e^{x^2(1-y)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1, 1) = e^{-0,1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^{x^2(1-y)} (-2x^3(1-y) - 2x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1, 1) = e^{-0,1} (-0,2 - 2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -1,8 e^{-0,1}$$

le développement limité à l'ordre 2 en $(1,1)$ de f est

$$f(x,y) = e^{-0,1} [1 - 0,2(x-1) - 1(y-1) + 0,8(x-1)^2 + 0,5(y-1)^2 - 1,8(x-1)(y-1)] + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$$

3/ Appliquons le développement limité en $(1,1)$ pour calculer $f(1,1)$

$$f(1,1) = e^0 = 1$$

et

$$f(1,1) \approx e^{-0,1} (1 + 0,1 + 0,05) \quad \text{(en utilisant le développement limité)}$$

Donc

$$1 = e^{-0,1} (1,105)$$

d'où

$$\underline{e^{0,1} = 1,105}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} u_{n+2} + \sqrt{3} u_{n+1} + 2u_n = n + 3^n$$

1) L'équation homogène associée est

$$\frac{1}{2} u_{n+2} + \sqrt{3} u_{n+1} + 2u_n = 0$$

2) L'équation caractéristique est

$$\frac{1}{2} x^2 + \sqrt{3} x + 2 = 0$$

$$\Delta = 3 - 4 = -1$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} + i \\ x_2 = -\sqrt{3} - i \end{cases}$$

$$|x_1| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\text{on a } \begin{cases} -\sqrt{3} = 2 \cos \theta_1 \\ 1 = 2 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta_1 = \frac{5\pi}{6}$$

on a donc

$$\begin{cases} x_1 = 2 e^{5\pi i / 6} \\ x_2 = 2 e^{-5\pi i / 6} \end{cases}$$

$$\text{On a donc } u_n^* = 2^n \left(A \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + B \sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) \right) \quad A, B \in \mathbb{R}^2$$

3) le second membre est constitué d'un terme polynôme n et d'un terme de la forme 3^n

On note $P_{1,n}$ la solution particulière avec le second membre n . 1^n est pas solution de l'équation caractéristique. On a donc

$$P_{1,n} = \alpha n + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{on a } \frac{1}{2} P_{1,n+2} + \sqrt{3} P_{1,n+1} + 2 P_{1,n} = n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\alpha(n+2) + \beta) + \sqrt{3} (\alpha(n+1) + \beta) + 2(\alpha n + \beta) = n$$

$$(1) m\left(\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{3}\alpha + 2\alpha\right) + \alpha + \frac{\beta}{2} + \alpha\sqrt{3} + \sqrt{3}\beta + 2\beta = m$$

On a donc

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{3}\alpha + 2\alpha = 1 \\ \alpha + \frac{\beta}{2} + \alpha\sqrt{3} + \sqrt{3}\beta + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \alpha(\sqrt{3} + \frac{5}{2}) = 1 \\ \alpha(1 + \sqrt{3}) + \beta(\sqrt{3} + \frac{5}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \alpha = \frac{2}{5 + 2\sqrt{3}} \\ \frac{2(1 + \sqrt{3})}{5 + 2\sqrt{3}} + \beta\left(\frac{2\sqrt{3} + 5}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \alpha = \frac{2}{5 + 2\sqrt{3}} \\ \beta\left(\frac{2\sqrt{3} + 5}{2}\right) = \frac{-2(1 + \sqrt{3})}{5 + 2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \alpha = \frac{2}{5 + 2\sqrt{3}} \\ \beta = \frac{-2(1 + \sqrt{3})}{(5 + 2\sqrt{3})^2} \end{cases}$$

On a donc

$$P_{1,n} = \frac{2}{5 + 2\sqrt{3}} m - \frac{2(1 + \sqrt{3})}{(5 + 2\sqrt{3})^2}$$

On note $P_{2,n}$, la solution particulière avec le second membre 3^n . 3^n est pas solution de l'équation caractéristique. On a donc.

$$P_{2,n} = \gamma 3^n \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Or on a $\frac{1}{2} P_{2,n+2} + \sqrt{3} P_{2,n+1} + 2 P_{2,n} = 3^n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma 3^{n+2} + \sqrt{3} \gamma 3^{n+1} + 2 \gamma 3^n = 3^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} + 3\sqrt{3}\gamma + 2\gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma \left(3\sqrt{3} + \frac{13}{2} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{2}{6\sqrt{3} + 13}$$

Donc $P_{2,n} = \frac{2}{6\sqrt{3} + 13} 3^n$

4/ On $U_n = U_n^* + P_{1,n} + P_{2,n}$

d'où $U_n = 2^n \left(A \cos\left(n \frac{5\pi}{6}\right) + B \sin\left(n \frac{5\pi}{6}\right) \right) + \frac{2n}{5+2\sqrt{3}} - \frac{2(1+\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})^2} + \frac{2 \cdot 3^n}{6\sqrt{3} + 13}$

$$A, B \in \mathbb{R}^2$$

Sont $B(x, y, z) = z$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

1. La première contrainte donne $z = 2x - y$, on peut donc simplifier le problème en optimisant $\tilde{B}(x, y) = 2x - y$ sous la contrainte $2x^2 + y^2 = 9$.
On note $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 9$

2. Qualification de la contrainte

$$J_g(x, y) = (4x \quad 2y)$$

J_g est de taille $(2, 2)$, le rang maximal de J_g est de 1.

Pour que $\text{rang } J_g = 0$, il faut que :

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le point $(0, 0)$ ne vérifie pas la contrainte ($0 \neq 9$). Donc, on a toujours $\text{rang } J_g = 1$, la contrainte est qualifiée.

Cherchons les points candidats

On écrit le Lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = \tilde{B}(x, y) - \lambda g(x, y)$$

$$\Leftrightarrow L(x, y, \lambda) = 2x - y - \lambda(2x^2 + y^2 - 9)$$

Les points candidats vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

$$g(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4\lambda x = 0 \\ -1 - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = -2\lambda y \\ 2x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2\lambda x = -2\lambda y \\ 2x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$E1 \begin{cases} 2\lambda x = 1 \\ x = -y \\ 3x^2 = 9 \end{cases}$$

$$E1 \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \\ \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \\ \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

les points candidats sont $X_1 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ et $X_2 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$

Cherchons la nature des points candidats

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, \lambda) = -4\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, \lambda) = -2\lambda$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x, y, \lambda) = 0$$

$$D_L^2(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -4\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \quad \text{les valeurs propres de } D_L^2(x, y, \lambda) \text{ sont } -4\lambda \text{ et } -2\lambda.$$

Pour X_1 : $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ donc la signature de $D_L^2(x, y, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ est $(0, 2)$ donc

$D_L^2(x, y, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ est définie négative et X_1 est un maximum global valant $3\sqrt{3}$

Pour X_2 : $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ donc la signature de $D_L^2(x, y, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$ est $(2, 0)$ donc

$D_L^2(x, y, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$ est définie négative et X_2 est un minimum global valant $-3\sqrt{3}$

3) On a $y = 2x = 4$

On a donc $\begin{cases} (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 3\sqrt{3}) (X_1) \text{ qui est un maximum global de } f \text{ valant } 3\sqrt{3} \\ (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -3\sqrt{3}) (X_2) \text{ qui est un minimum global de } f \text{ valant } -3\sqrt{3} \end{cases}$