

Statistiques appliquées à la gestion

Licence 2 gestion
2023/2024

R. ZAFRI

Maître de Conférences

raouf.zafri@univ-paris1.fr

Sommaire du cours

Chapitre 1 : Dénombrements et analyse combinatoire

Chapitre 2 : Introduction aux formalismes des probabilités

Chapitre 3 : Indépendances et probabilités conditionnelles

Chapitre 4 : Introduction aux variables aléatoires réelles

Chapitre 5 : Variables aléatoires discrètes usuelles

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles absolument continues

Chapitre 7 : Loi de probabilité

Chapitre 6 : Variables aléatoires réelles continues

1. Variable aléatoire à densité

1. Variable aléatoire à densité

A. Rappel : variables aléatoires discrètes

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

on considère le jeu suivant :

Si le résultat est impair, on gagne 1€.

Si le résultat est 2, on gagne 2€.

Si le résultat est 4 ou 6, on perd 5€.

1. Variable aléatoire à densité

A. Rappel : variables aléatoires discrètes

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 1 est égale à $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On note : $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

De même : $P(X = 2) = \frac{1}{6}$

Enfin : $P(X = -5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

x_i	-5	2	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Pour une variable aléatoire discrète, la loi de probabilité peut être résumée dans un tableau.

La variable aléatoire ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est dite **discrète**.

Mais il existe des variables aléatoires qui prennent n'importe quelle valeur dans un intervalle de $\mathbb{R}$...

1. Variable aléatoire à densité

B. Variables aléatoires continues

Exemple

Une entreprise fabrique des imprimantes.

On définit une variable aléatoire qui indique la durée de vie en heure d'une imprimante. Cette durée n'est pas nécessairement un nombre entier et peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Une telle variable aléatoire est dite **continue**.

1. Variable aléatoire à densité

C. Fonction à densité

Dans le cas d'une variable aléatoire continue qui prend pour valeurs les réels d'un intervalle I , sa loi de probabilité n'est pas associée à la probabilité de chacune de ses valeurs (comme dans le cas discret) mais à la probabilité de tout intervalle inclus dans I . On a ainsi recours à une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et appelée **fonction de densité**.

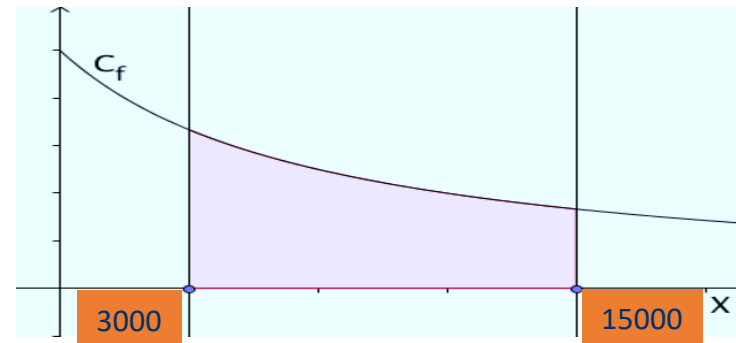
Exemple :

Dans l'exemple précédent, on peut par exemple calculer $P(3000 \leq X \leq 15000)$ correspondant à la probabilité que la durée de vie d'une imprimante soit comprise entre 3000 heures et 15000 heures.

Pour cela, on utilise la fonction de densité f définissant la loi de probabilité.

La probabilité $P(3000 \leq X \leq 15000)$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction de densité et les droites d'équations $x = 3000$ et $x = 15000$.

$$\text{Ainsi : } P(3000 \leq X \leq 15000) = \int_{3000}^{15000} f(x) dx.$$



1. Variable aléatoire à densité

C. Fonction à densité

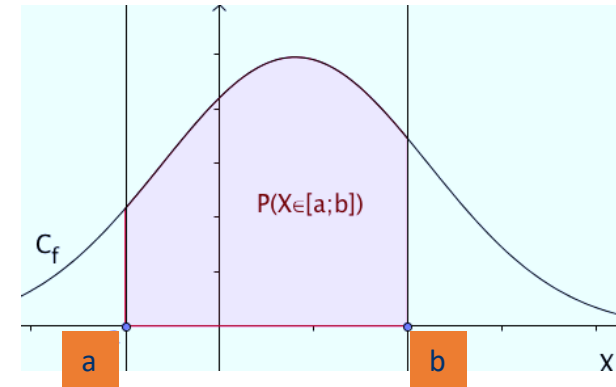
Définition

On appelle fonction de densité (ou densité) toute fonction f définie, **continue** et **positive** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que **l'intégrale de f sur I soit égale à 1**.

Si X est une variable aléatoire continue sur $[a ; b]$, la probabilité de l'événement $\{X \in [a ; b]\}$, où $[a ; b]$ est un intervalle de I , est égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a ; b]$, soit : $P(X \in [a ; b]) = \int_a^b f(x) dx$.

Dans le cas de variables aléatoires continues, on a :

$P(X \leq a) = P(X < a)$, en effet $P(X = a) = \int_a^a f(x) dx = 0$.



1. Variable aléatoire à densité

C. Fonction à densité

Exemple 1

Démontrer que la fonction f définie sur $[2 ; 4]$ par $f(x) = 0,5x - 1$ est une fonction de densité.

Résolution

- $0,5x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$: f est continue(car une fonction affine) et positive sur $[2 ; 4]$
- Vérifions que $\int_2^4 f(x) dx = 1$.
- $$\begin{aligned}\int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 0,5x - 1 dx \\ &= [0,25x^2 - x]_2^4 \\ &= 0,25 \times 4^2 - 4 - (0,25 \times 2^2 - 2) \\ &= 4 - 4 - 1 + 2 = 1\end{aligned}$$
- La fonction f est donc une fonction de densité sur $[2 ; 4]$.

La fonction définie par $f(x) =$	admet une primitive définie par $F(x) =$	sur tout intervalle I contenu dans
a , où $a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
x^n , où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

1. Variable aléatoire à densité

C. Fonction à densité

Exemple 2

Démontrer que la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2$ est une fonction de densité.

Résolution

- f est un polynôme donc f est continue sur $[-1 ; 1]$
- $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$
- f est positive sur $[-1 ; 1]$

$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$		
$\frac{3}{4}$	+	+	+		
$1 - x^2$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	0	-

1. Variable aléatoire à densité

C. Fonction à densité

Exemple 2

Démontrer que la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2$ est une fonction de densité.

Résolution

- Vérifions que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$
- $\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4} - \frac{-1}{4} \right) = 1$
- Donc f est donc une fonction de densité sur $[-1 ; 1]$.

1. Variable aléatoire à densité

C. Fonction à densité

Exemple 3

Démontrer que la fonction f définie sur $[0 ; +\infty]$ par $f(x) = e^{-x}$ est une fonction de densité.

Résolution

- f est continue sur $[0 ; +\infty]$ comme composée de fonctions continues
- Pour tout $x \in [0 ; +\infty]$, $e^{-x} > 0$ donc f est positive sur $[0 ; +\infty]$
- $\int_0^t f(x) dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^t = [-e^{-x}]_0^t = [e^{-x}]_t^0 = 1 - \frac{1}{e^t}$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^t} = 1$

La fonction définie par $f(x) =$	admet une primitive définie par $F(x) =$	sur tout intervalle I contenu dans
a , où $a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
x^n , où $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

1. Variable aléatoire à densité

D. Fonction de répartition

Rappel de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

La fonction de répartition en statistiques est un concept utilisé pour décrire la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur inférieure ou égale à une certaine valeur.

Imaginons que nous avons un dé à six faces et que nous voulons connaître la probabilité que le résultat soit inférieur ou égal à un certain nombre lorsqu'on le lance.

- La fonction de répartition $F(x)$ pour ce dé peut être écrite comme suit :
- $F(1)=P(X\leq 1)=\frac{1}{6}$ (car il n'y a qu'une seule face qui a le numéro 1)
- $F(2)=P(X\leq 2)=\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (car deux faces ont le numéro 1 ou 2)
- $F(3)=P(X\leq 3)=\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $F(4)=P(X\leq 4)=\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $F(5)=P(X\leq 5)=\frac{5}{6}$
- $F(6)=P(X\leq 6)=1$ (car toutes les faces sont inférieures ou égales à 6)

Ainsi, la fonction de répartition pour un dé à six faces nous donne la probabilité cumulée d'obtenir un résultat inférieur ou égal à chaque face possible du dé.

1. Variable aléatoire à densité

D. Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur un intervalle $[a ; b]$.

Alors, pour tout x de $[a ; b]$, on a : $P(X \leq x) = \int_a^x f(t) dt$.

La fonction définie sur $[a ; b]$ par $x \mapsto P(X \leq x)$ est appelée **fonction de répartition** de X .

1. Variable aléatoire à densité

Exemple : Calculer des probabilités avec une variable aléatoire continue

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x)=e^{-x}$

X est une variable aléatoire de densité f

Calculer les probabilités suivantes : a) $P(1 \leq X \leq 2)$ b) $P(X \geq 3)$

Corrigé

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_1^2 = [-e^{-x}]_1^2 = [e^{-x}]_2^1 = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(0 \leq X \leq 3) = 1 - \int_0^3 e^{-x} dx = 1 - \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_0^3 = 1 - [-e^{-x}]_0^3 = 1 - [e^{-x}]_3^0 = 1 - (e^0 - e^{-3}) = 1 - 1 + e^{-3} = e^{-3}$$

1. Variable aléatoire à densité

E. Espérance et variance

Définition

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f sur un intervalle $[a ; b]$. L'espérance mathématique de X et la variance de X sont :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx$$

1. Variable aléatoire à densité

E. Espérance et variance

Exemple

Une entreprise produit des dalles en plâtre suivant une variable aléatoire continue X , en tonnes, qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0 ; 20]$ avec une densité de probabilité f définie par : $f(x) = 0,015x - 0,00075x^2$

- a) Vérifier que f est une densité de probabilité sur $[0 ; 20]$.
- b) Calculer la probabilité de l'événement E "La production quotidienne est supérieure ou égale à 12 tonnes".
- c) Calculer l'espérance mathématique de X .

1. Variable aléatoire à densité

E. Espérance et variance

Résolution

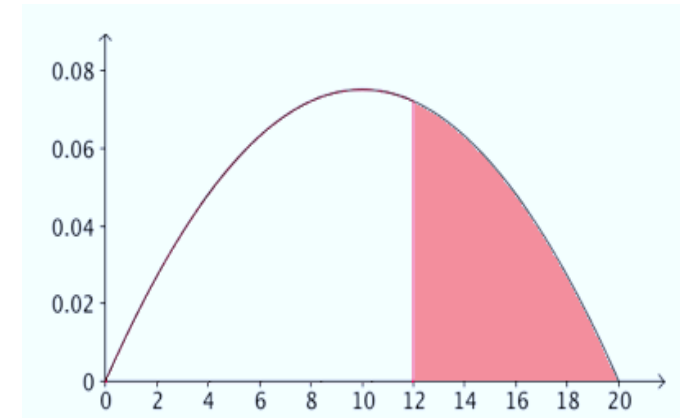
$$f(x) = 0,015x - 0,00075x^2$$

a) f est continue sur l'intervalle $[0 ; 20]$ comme fonction trinôme.

$$f(0) = f(20) = 0$$

donc, d'après la règle des signes d'un trinôme, $f(x) \geq 0$ sur $[0 ; 20]$.

$$\int_0^{20} f(x) dx = [0,0075x^2 - 0,00025x^3]_0^{20} = 0,0075 \times 20^2 - 0,00025 \times 20^3 - 0 = 1$$



1. Variable aléatoire à densité

E. Espérance et variance

Résolution

$$f(x) = 0,015x - 0,00075x^2$$

$$\text{b) } P(E) = P(12 \leq X \leq 20)$$

$$= \int_{12}^{20} f(x)dx$$

$$= [0,0075x^2 - 0,00025x^3]_{12}^{20}$$

$$= 0,0075 \times 20^2 - 0,00025 \times 20^3 - 0,0075 \times 12^2 + 0,00025 \times 12^3$$

$$= 1 - 0,648$$

$$= 0,352$$

1. Variable aléatoire à densité

E. Espérance et variance

Résolution

$$f(x) = 0,015x - 0,00075x^2$$

$$\begin{aligned} \text{c) } E(X) &= \int_0^{20} xf(x)dx \\ &= \int_0^{20} 0,015x^2 - 0,00075x^3 dx \\ &= [0,005x^3 - 0,0001875x^4]_0^{20} \\ &= 0,005 \times 20^3 - 0,0001875 \times 20^4 - 0 = 10 \end{aligned}$$