Chapitre 1

Espace vectoriel et application linéaire

1.1 Espaces vectoriels

1.1.1 Rappel : Groupes, anneaux et corps

Soit G un ensemble et + une loi sur cet ensemble. + est une application de $G \times G \to G$ qui à $(x, y) \in G \times G$ associe le point $x + y$ de G.

Définition *(G,+) est appelé un* ***groupe*** *si et seulement si :*

(i) La loi est associative : $\forall (x, y, z) \in G \times G \times G$ *on a :* $x + (y + z) = (x + y) + z$

(ii) Existence de l'élément neutre : $\exists 0_G \in G$ *tel que* $\forall x \in G$ *on a :* $0_G + x = x + 0_G = x$

(iii) Existence d'un élément inverse : $\forall x \in G$, $\exists y \in G$ *tel que* $x + y = 0_G$ *(y est généralement noté -x).*

(G,+) est un groupe abélien ou groupe commutatif si (G,+) est un groupe et s'il est de plus commutatif

(iv) Groupe commutatif $\forall (x, y) \in G \times G : x + y = y + x$

On considère maintenant un ensemble A muni de deux lois + et *.

Définition *(A,+,*) est un* ***anneau*** *si et seulement si :*

(i) (A,+) est un groupe commutatif ayant pour élément neutre un élément noté 0.

*(ii) * est une loi associative.*

*(iii) La loi * est distributive à droite et à gauche sur la loi +.*

Ainsi $a * (b + c) = a * b + a * c$ *et* $(a + b) * c = a * c + b * c$

*(iv) * admet un élément neutre noté 1.*
*On dit qu'un anneau est commutatif lorsque la loi * est commutative.*

Définition *Soit G un ensemble muni d'une loi $*$. On dit que $a \in G$ est un élément absorbant pour G si et seulement si : $\forall x \in G : a * x = x * a = a$*

Proposition *Soit A un anneau commutatif alors 0 est un élément absorbant pour la loi *.*

Définition *(K,+,*) est un* **corps** *(resp. commutatif) si et seulement si :*
(i) (K,+,) est un anneau (resp. commutatif).*
*(ii) Tout élément distinct de 0 admet un inverse pour la loi *.*

Exemple *Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers naturels positifs et négatifs.*
$(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe.*
$(\mathbb{Z}, +, *)$ *est un anneau commutatif.*
Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
$(\mathbb{Q}, +)$ *est un groupe.*
$(\mathbb{Q}, +, *)$ *est un corps commutatif.*
Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
$(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe.*
$(\mathbb{R}, +, *)$ *est un corps commutatif.*
Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
$(\mathbb{C}, +)$ *est un groupe.*
$(\mathbb{C}, +, *)$ *est un corps commutatif.*

1.1.2 Espaces vectoriels

Soit E un ensemble et $(K, +, *)$ un corps. Considérons que E est muni de deux lois :

Une loi interne $\oplus$: $\left\{ \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (X, Y) \longmapsto X \oplus Y \end{array} \right.$

Une loi externe . : $\left\{ \begin{array}{l} K \times E \to E \\ (\lambda, X) \longmapsto \lambda.X \end{array} \right.$

Définition *E muni de ces deux lois est un* ***K*-espace vectoriel** *si et seulement si*
$(E, \ominus)$ *est un groupe commutatif*
(1) Associativité
(2) Existence d'un élément neutre
(3) Existence de l'opposé

(4) Commutativité

Et si la loi externe vérifie :

(5) Distributivité à gauche de . sur $\oplus$: $\forall (X,Y) \in E \times E, \forall \lambda \in K$
$\lambda.(X \oplus Y) = \lambda.X \oplus \lambda.Y$

(6) Distributivité à droite de . sur + : $\forall X \in E, \forall (\lambda,\mu) \in K \times K$
$(\lambda + \mu).X = \lambda.X \oplus \mu.X$

(7) Associativité de . : $\forall X \in E, \forall (\lambda,\mu) \in K \times K : \lambda.(\mu.X) = (\lambda * \mu).X$

(8) Elément neutre : $\forall X \in E : 1.X = X$

Remarque :

Les éléments de K sont souvent appelés les scalaires.

Enfin, ceci est implicite dans cette définition mais on doit avoir la stabilité pour la loi interne (i.e. $\forall (X,Y) \in E \times E : X \oplus Y \in E$) et pour la loi externe ($\forall (\lambda, X) \in K \times E : \lambda.X \in E$).

Proposition *On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in E,\ 0_K.x = 0_E$
2. $\forall \lambda \in K,\ \lambda.0_E = 0_E$
3. $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, -(\lambda.x) = (-\lambda).x = \lambda.(-x)$
4. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in K,\ \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow [\lambda = 0_K \ ou\ x = 0_E]$

(A prouver en exercice)

Exemples :

a) $\mathbb{R}^n$ avec les propriétés usuelles d'addition de vecteurs et de multiplication par un scalaire. Ainsi $\mathbb{R}^3$ muni des deux lois suivantes

1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$

2) $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, x \\ \lambda\, y \\ \lambda\, z \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Soit X un ensemble quelconque non vide. Soit E un K espace vectoriel. L'ensemble $F(X,E)$ des applications de X dans E est un K espace vectoriel pour les lois définies ainsi

1) $f \oplus g : x \mapsto f(x) + g(x)$

2) $\lambda.f : x \mapsto \lambda.f(x)$

Ainsi $F(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$; $F([a,b], \mathbb{R})$ ou encore $F(N, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Définition *Soit E un K espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E : $F \subseteq E$, alors F est un* **sous-espace vectoriel** *de E si F muni des lois internes et externes restreintes sur F a la structure d'espace vectoriel.*

Proposition *Soit $F \subseteq E$ une partie non vide où E est un K espace vectoriel. On a équivalence entre :*
(i) F est un sous-espace vectoriel
(ii) $\forall (X, Y) \in F \times F, \forall \lambda \in K : X + Y \in F$ et $\lambda.X \in F$
(iii) $\forall (X, Y) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in K \times K : \lambda.X + \mu.Y \in F$

Cette proposition nous indique qu'il est nécessaire et suffisant de montrer que F est stable par combinaison linéaire pour montrer que c'est un sous-espace de E. En particulier on peut remarquer qu'on doit toujours avoir $\overrightarrow{0} \in F$.

Exemples de sous espaces-vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Proposition *Soit F_i une famille de sous-espaces vectoriels alors $F = \bigcap_i F_i$ est aussi un sous espace vectoriel.*

Remarque :
L'union de deux sous espace vectoriel n'est en général pas un sous espace vectoriel à moins que l'un soit inclus dans l'autre.

Définition *U est une combinaison linéaire des vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ si U peut s'écrire $U = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i.V_i$ où $\alpha_i \in K$*

Proposition *L'ensemble des combinaisons linéaires de p vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition *On appelle somme des sous espaces vectoriels $F_1, F_2, ...F_p$ l'ensemble défini par :*
$Vect\,(F_1 \bigcup F_2 \bigcup ... \bigcup F_p)$.

Il est facile de montrer que

$$F_1 + ... + F_p = \left\{ x \in E \,|\exists x_i \in F_i : x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\}$$

Définition *La somme de sous espaces $F_1, F_2, ...F_p$ est dite directe si tout vecteur X de la somme se décompose de façon unique sur cette somme. On note alors $F_1 \oplus ... \oplus F_p$*

Remarque :

Deux sous espaces sont en somme directe si et seulement si leur intersection est nulle. Le critère est par contre plus complexe pour plus de deux sous espaces (exemple : il faut que $\forall i : F_i \bigcap \left(\sum\limits_{j \neq i} F_j \right) = \{0_E\}$).

Définition *On dit que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires si leur somme directe recouvre l'espace E tout entier.*

(Exemple graphique)

1.2 Famille libre et liée de vecteur

Soit E un K espace vectoriel et $V_1, V_2, ..., V_p$ des vecteurs de E.

Définition *p vecteurs de E sont dits* ***linéairement dépendants*** *s'il existe p scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i = \overrightarrow{0}$*

On dit aussi que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est **liée**.

Définition *p vecteurs de E sont dits* ***linéairement indépendants*** *ssi :* $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$

On dit aussi que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est **libre**.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille libre ou liée ?

1.2.1 Base d'un espace vectoriel

Définition *On dit que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est* ***génératrice*** *ssi tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs : $\forall X \in E : \exists \alpha_1 ... \alpha_p$ tel que $X = \sum\limits_{i=1} \alpha_i . V_i$.*

$\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i . V_i$ est appelé une décomposition de X.

Remarque :
Si p vecteurs engendrent E, alors la famille de vecteurs composée de ces p vecteurs plus n'importe quel vecteur engendre aussi E.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-ils une famille génératrice ?

Définition *On dit que la famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est une* ***base*** *de E si cette famille est libre et génératrice.*

Proposition *On a équivalence entre :*
(i) La famille de vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ est une base.
(ii) Tout vecteur se décompose de manière unique sur $V_1, V_2, ..., V_p$.

(Preuve à faire)

Exemple :

Pour $\mathbb{R}^3$, on peut prendre $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ainsi un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette base est appelée la base canonique.

Proposition (Théorème de la base incomplète)
Soient p vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$ qui engendrent E. Si q d'entre ~~eux~~ forment ~~une~~ famille libre, alors il existe une base de E qui contient les q vecteurs et qui est incluse dans l'ensemble des vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p$.

(Explication...)

1.2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Nous nous intéressons dans ce cours aux espaces vectoriels de dimension finie. On dit qu'un espace est de dimension finie quand il existe un nombre fini de générateurs de E.

Remarque : L'ensemble des polynômes de degré quelconque forme un espace de quelle dimension ?

Proposition *Soit E un espace vectoriel, alors toute base de E contient le même nombre de vecteurs.*

Le fait que le nombre de vecteurs de base est indépendant de la base choisie nous amène à la définition suivante...

Définition *On appelle **dimension** de l'espace vectoriel E le nombre de vecteurs de base .*

Définition *Soit F un sous-espace de E, on appelle base de F une famille de vecteur de F qui est libre et qui est génératrice de F tout entier.*

On peut en déduire plusieurs conséquences
Soit E un espace vectoriel de dimension n alors :
- n vecteurs indépendants de E sont forcément générateurs et forment donc une base de E.
- n vecteurs générateurs de E sont forcément libres et forment donc une base de E.
- Tout sous-espace vectoriel de E est de dimension $p \leq n$.

1.2.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition *Le **rang** d'une famille de p vecteurs est le plus grand nombre de vecteurs de la famille qui sont linéairement indépendants.*

Nous pouvons alors vérifier plusieurs propriétés sur le rang :
- Soit p vecteurs, alors leur rang est inférieur ou égal à p.
- Dans un espace de dimension n, le rang est inférieur ou égal à n.
- Le rang de p vecteurs est égal à la dimension du sous-espace vectoriel qu'il engendre.

Exemple :
Quel est le rang de la famille suivante

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1.3 Application linéaire

Définition *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K.*

Alors $u : E \to F$ est une ***application linéaire*** *si et seulement si :*

(i) $\forall (X,Y) \in E^2 : u(X+Y) = u(X) + u(Y)$

(ii) $\forall (\alpha, X) \in K \times E : u(\alpha.X) = \alpha.u(X)$

Proposition *$u : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si* $\forall (\alpha, \beta) \in K \times K$ *et* $\forall (X,Y) \in E^2$:
$u(\alpha X + \beta Y) = \alpha u(X) + \beta u(Y)$

(Preuve à faire)

Remarque :
En particulier une condition nécessaire pour que u soit linéaire est que $u\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$.

Exercice
Montrez que l'image de p vecteurs linéairement dépendants de E par une application linéaire constitue une famille de p vecteurs linéairement dépendants de F.

Définition *On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Si $u \in L(E,F)$ est bijective on dit que u est un ***isomorphisme*** *de E dans F.*

Si $u \in L(E,E) = L(E)$ on dit que u est un ***endomorphisme*** *de E.*

Un endomorphisme qui est bijectif est un ***automorphisme*** *de E.*

Enfin une application linéaire de E dans K est appelée forme linéaire sur E.

Proposition *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies alors $L(E,F)$ est un K-espace vectoriel de dimension égale à* $\dim E * \dim F$.

1.3.1 Image et rang d'une application linéaire

Définition *On appelle* ***image de u*** *la partie de l'ensemble d'arrivée F qui est composée des images de vecteurs de E.*

$Im(u) = u(E) = \{u(X) \mid X \in E\}$

$Im(u) = \{Y \in F \mid \exists X \in E \text{ tel que } u(X) = Y\}$

Proposition *L'image de u est un sous-espace vectoriel de F.*

(Preuve à faire)

Définition *Le **rang de u** est la dimension de l'image de **u** : $Rang(u) = \dim(Imu)$*

Pour calculer facilement le rang, il suffit de calculer le rang de la famille de vecteurs formée par les images d'une base.

Exemple :
Calculez le rang de l'application linéaire suivante :
$u(x, y) = (x + y, x - y, x)$

Proposition
*u est **surjective** si et seulement si $Rang(u) = \dim F$*

(Preuve à faire)

Remarquons que, pour qu'une application puisse être surjective, il faut que $\dim F \leq \dim E$. Cette condition est nécessaire mais certainement pas suffisante.

1.3.2 Noyau d'une application linéaire

Définition *Le **noyau** d'une application linéaire noté $Ker\, u$ est l'ensemble de vecteurs de E dont l'image est le vecteur nul de F :*

$$Ker\, u = \left\{X \in E \,|\, u(X) = \overrightarrow{0}\right\}$$

Proposition
$\ker u$ est un sous-espace vectoriel de E

(Preuve à faire)

Proposition
*u est **injective** si et seulement si $Ker\, u = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$*

(Preuve à faire)

Définition *Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*

Exercice
Montrez que si u est une application linéaire bijective alors u^{-1} est une application linéaire.

1.3.3 Théorème du rang

Proposition (Théorème du rang)
Soit $u : E \to F$ une application linéaire alors :
$\dim(\ker u) + Rang\,(u) = \dim(E)$

Ce théorème est très pratique par exemple pour calculer le rang : on commence par calculer le noyau, et en utilisant la formule, on a :
$Rang\,(u) = \dim(E) - \dim(\ker u)$.
(Explications de la proposition...)

Proposition *Soit u une application linéaire de E vers F. Soit $f_1, ..., f_r$ une base de l'image de u, prenons la famille $e_1, ..., e_r$ des antécédents de cette base. On complète cette famille en prenant $e_{r+1}, ..., e_p$ une base du noyau de u. Alors la famille $e_1, ..., e_p$ est une base de E.*

On voit qu'il suffit d'utiliser cette base pour démontrer l'égalité du théorème du rang.

1.4 Exercices

1) Montrer que l'image d'un sous espace vectoriel par u, une application linéaire, est un sous espace vectoriel.

2) Montrer que l'antécédent d'un sous espace vectoriel par u, une application linéaire, est un sous espace vectoriel.

3) Montrer que si G est une famille génératrice de E alors $u(G)$ est une famille génératrice de Imu.

4) Montrer que si u est injective et si G est un système libre de E alors $u(G)$ est un système libre de F.

5) Montrer que si u est bijective et si B est une base de E alors $u(B)$ est une base de F.