Chapitre 4

Formes quadratiques

4.1 Définitions

Définition *Soit $W : E^2 \to \mathbb{R}$, alors W est une forme* ***bilinéaire*** *si elle est linéaire par rapport aux deux variables :*

(i) $\forall (X_1, X_2) \in E \times E$ *et* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *alors :*
$W(aX_1 + bX_2, Y) = aW(X_1, Y) + bW(X_2, Y)$

(ii) $\forall (Y_1, Y_2) \in E \times E$ *et* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *alors :*
$W(X, aY_1 + bY_2) = aW(X, Y_1) + bW(X, Y_2)$

On étudie une forme bilinéaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

On peut entièrement définir une forme bilinéaire à l'aide des coefficients

$W(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i Y_j$

On a alors $W(X, Y) = {}^tX.A.Y$

Où A est la matrice des éléments a_{ij}, c'est la matrice associée à la forme bilinéaire W. X et Y sont les vecteurs colonnes de coordonnées X et Y.

Exemple :

La forme suivante $W\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \quad x_1x_2 - y_1y_2$ est elle bilinéaire ? Quelle est sa matrice associée ?

Exercice :

On considère sur $E = \mathbb{R}^2$ le déterminant de deux vecteurs. Montrez qu'il s'agit d'une forme bilinéaire. Quelle est sa matrice associée ?

Définition *Une forme bilinéaire est dite* ***symétrique*** *si pour tout X et Y on a : $W(X, Y) = W(Y, X)$.*

Pour une forme bilinéaire symétrique, on a donc :
$W(X,Y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_iY_j = W(Y,X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}Y_iX_j$
On en déduit que l'on doit avoir
$\forall(i,j) : a_{ij} = a_{ji}$.
Donc $W(X,Y) = {}^tX.A.Y = {}^tY.A.X$ et la matrice associée à la forme bilinéaire W est symétrique.

Définition *Une forme quadratique se définit à partir d'une forme bilinéaire symétrique W. Q est une* ***forme quadratique*** *ssi il existe W une forme bilinéaire tel que :* $Q(X) = W(X,X)$.

$Q(X)$ est une combinaison linéaire de produit de coordonnées de X d'ordre 2.
On a $Q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}X_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} (a_{ij}+a_{ji})X_iX_j$
Donc,
$Q(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}X_i^2 + 2.\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}X_iX_j$ puisque Q est symétrique.
Une forme quadratique est donc un polynôme homogène de degré 2.
Pour la notation matricielle, la matrice associée à Q est en fait la matrice associée à la forme bilinéaire symétrique. Cette matrice A est symétrique et on a $Q(X) = {}^tX.A.X$
A chaque forme quadratique on associe une unique matrice symétrique associée et réciproquement, il y a isomorphisme entre les matrices symétriques de taille n et les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple :
Trouvez la matrice associée à la forme quadratique $3.x^2+2.xy-2.y^2+3.z^2$
Trouvez la matrice associée à la forme quadratique $a.x_1^2+b.x_1.x_2+c.x_2^2$
Trouvez ensuite la matrice associée à la forme quadratique $a.x_1^2+b.x_2^2+c.x_3^2+d.x_1x_2+e.x_1x_3+f.x_2x_3$

4.2 Décomposition canonique

4.2.1 Diagonalisation

La matrice A associée à une forme quadratique Q est symétrique donc elle est diagonalisable.

Définition
Une matrice est dite ***orthogonale*** *si les vecteurs qui la composent (pris en*

colonne) sont orthogonaux 2 à 2.
Une matrice est dite **normée** *si les vecteurs qui la composent (pris en colonne) sont de norme 1.*
Une matrice est dite **orthonormée** *si elle est orthogonale et normée.*

Proposition *L'inverse d'une matrice orthonormée est sa transposée.*

(Preuve à faire)

Proposition *Soit A une matrice réelle symétrique alors :*
(i) Toutes ses valeurs propres sont réelles.
(ii) Deux espaces propres associes à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Proposition *Une matrice A réelle symétrique est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et on peut toujours trouver une base orthonormée de vecteurs propres.*

Remarque :
Lorsque les valeurs propres sont toutes simples, il est facile de trouver cette matrice orthonormée de vecteurs propres. En revanche c'est plus difficile lorsque des valeurs propres sont de multiplicité superieur à 2.

Proposition *Soit Q une forme quadratique représentée par A alors $Q(X) = {}^tX.A.X$. A est alors diagonalisable et Q peut se décomposer comme somme de composantes aux carrés et admet donc une décomposition canonique.*

Preuve
Comme $A = P.D.{}^tP$ on a :
$Q(X) = {}^tX.P.D.{}^tP.X$ donc dans la nouvelle base où $Y = {}^tP.X$ alors Q peut être représentée par D car $Q = {}^tY.D.Y$.

Exemple :
Trouvez la décomposition canonique de $Q(x, y) = x^2 + y^2 - 2.xy$

4.2.2 Processus de Gram-Schmidt

Rappel

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{X} = (x_1 ... x_n)$ est notée $\|\overrightarrow{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Un vecteur X est normé ssi $\|\overrightarrow{X}\| = 1$.

Le produit scalaire entre $\overrightarrow{X} = (x_1, ..., x_n)$ et $\overrightarrow{Y} = (y_1, ..., y_n)$ est noté : $\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y}$, de plus :

$$\overrightarrow{X}\,\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1.y_1 + \dots + x_n.y_n$$

Deux vecteurs X et Y sont orthogonaux ssi $\overrightarrow{X}.\overrightarrow{Y} = 0$.

Méthode de Gram-Schmidt

On considère la base composée des vecteurs suivants : $X_1, ..., X_4$. La méthode de Schmidt est une méthode qui permet à partir d'une base quelconque d'un sous espace d'obtenir une base orthonormale de ce sous espace.

La méthode consiste à normer l'un des vecteurs et à modifier tous les autres vecteurs afin que ceux ci soient tous orthogonaux au premier vecteur. Une fois que c'est fait, on laisse de côté le premier vecteur et on recommence avec les vecteurs restants et ainsi de suite.

- On prend le premier vecteur et on le norme : à la place de $\overrightarrow{X_1}$ on prend donc le vecteur $\overrightarrow{U_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{X_1}\|}\overrightarrow{X_1}$
- Ensuite, on calcule tous les produits scalaires de U_1 avec les autres vecteurs.
- Ainsi, à la place de $\overrightarrow{X_2}$, on prend $\overrightarrow{X_2'} = \overrightarrow{X_2} - \left(\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{X_2}\right)\overrightarrow{U_1}$
- A la place de $\overrightarrow{X_3}$, on prend $\overrightarrow{X_3'} = \overrightarrow{X_3} - \left(\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{X_3}\right)\overrightarrow{U_1}$
- etc...
- A présent par construction $\overrightarrow{X_2'}$, $\overrightarrow{X_3'}$ et $\overrightarrow{X_4'}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{U_1}$.
- On recommence alors le même procédé avec la famille $\overrightarrow{X_2'}$, $\overrightarrow{X_3'}$ et $\overrightarrow{X_4'}$...
- On prend donc à la place de $\overrightarrow{X_2'}$ le vecteur normé $\overrightarrow{U_2} = \frac{1}{\|\overrightarrow{X_2'}\|}.\overrightarrow{X_2'}$.
- Puis, à la place de $\overrightarrow{X_3'}$ le vecteur $\overrightarrow{X_3''} = \overrightarrow{X_3'} - \left(\overrightarrow{U_2}.\overrightarrow{X_3'}\right)\overrightarrow{U_2}$
- Puis à la place de $\overrightarrow{X_4'}$ le vecteur $\overrightarrow{X_4''} = \overrightarrow{X_4'} - \left(\overrightarrow{U_2}.\overrightarrow{X_4'}\right)\overrightarrow{U_2}$ ...

Remarque importante

Comme les espaces propres sont tous orthogonaux, on a besoin d'utiliser cette méthode que pour les bases des espaces propres de dimension au moins 2. Ainsi si toutes les valeurs propres sont simples, il est clair que n'importe quelle base de vecteurs propres sera forcément orthogonale.

4.2.3 Exemple

Soit $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2.xy + 2.yz + 2.xz$

Trouvez la matrice associée.

Diagonalisez cette matrice en trouvant une base de vecteurs propres orthonormée.

Écrire Q dans la nouvelle base.

4.3 La méthode de Gauss

Le but de cette méthode est aussi la factorisation de la forme quadratique. On isole successivement les termes en x que l'on considère comme le développement d'un carré puis ceux en y puis etc....

On commence par prendre une variable au carré et on factorise de sorte que tous les éléments contenant cette variable apparaisse sous ce carré. Ensuite, on retranche les termes nouveaux et on recommence avec les autres variables.

S'il n'y a plus de variables au carré, alors on utilise les formules du type

$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$

Une décomposition canonique d'une forme quadratique ne doit pas contenir plus de n termes au carré (où n est la dimension de l'espace de la forme quadratique, c'est à dire le nombre de variables du problème).

On appelle signature le nombre de coefficients positifs et de coefficients négatifs de la décomposition.

<u>Exemple :</u>

$Q(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - 2y.z - z^2$

Trouvez la signature et une décomposition canonique.

4.4 Nature des formes quadratiques

4.4.1 Théorème de Sylvester

Proposition *Le nombre de coefficients positifs et négatifs dans les décompositions d'une forme quadratique en combinaison linéaire de carrés ne dépend pas de la décomposition.*

Lorsque la forme quadratique $Q(X)$ est mise sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes, on dit qu'elle est écrite selon une décomposition canonique.

Définition *Soit n_+ le nombre de coefficients strictement positifs d'une décomposition canonique et n_- le nombre de coefficients strictement négatifs. Alors le couple (n_+, n_-) est appelé la* ***signature*** *de $Q(X)$.*

Si on se réfère à la décomposition canonique obtenue avec les valeurs propres, on constate que n_+ correspond au nombre de valeurs propres (distinctes ou non) strictement positives et n_- à celles qui sont strictement négatives.

On a donc $n_+ + n_- \leq n$ et, de plus, la différence $n - (n_+ + n_-)$ correspond à la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0, donc il s'agit de la dimension du noyau.

4.4.2 Nature d'une forme quadratique

Définition *Soit $Q(X)$ une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ et de signature (n_+, n_-)*

alors :

Semi-déf positive $\forall X \in \mathbb{R}^n$	$Q(X) \geq 0$	$n_- = 0$
Définie positive $\forall X \in \mathbb{R}^{n*}$	$Q(X) > 0$	$n_+ = n$
Semi-déf négative $\forall X \in \mathbb{R}^n$	$Q(X) \leq 0$	$n_+ = 0$
Définie négative $\forall X \in \mathbb{R}^{n*}$	$Q(X) < 0$	$n_- = n$

Une forme quadratique qui n'a pas de signe constant est dite indéfinie ou non-définie ou indéterminée.

Ainsi, pour étudier la nature d'une forme quadratique on doit étudier les valeurs propres.

On peut alors passer par l'étude des mineurs principaux.

Définition
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle ***sous-matrice principale*** *d'ordre k de A la matrice $k * k$ extraite de A obtenue en éliminant $n - k$ lignes et colonnes correspondantes de A. (Les mêmes lignes et colonnes sont supprimées).*
On appelle ***mineur principal*** *d'ordre k de A le déterminant de la sous-matrice principale d'ordre k.*

Définition
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle ***sous-matrice diagonale principale*** *d'ordre k de A la matrice $k*k$ extraite de A obtenue en éliminant les $n - k$ dernières lignes et dernières colonnes de A.*
On appelle ***mineur diagonal principal*** *d'ordre k de A le déterminant de la sous-matrice diagonale principale d'ordre k.*

Proposition *Soit A une matrice symétrique d'ordre n alors :*

- *A est définie positive si et seulement si tous ses n mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs.*
- *A est définie négative si et seulement si tous ses n mineurs diagonaux principaux sont non nuls et de signes alternés, le premier mineur étant négatif (celui 1*1).*
- *Si l'un des mineurs diagonaux principaux est non nul mais ne respecte pas l'une des deux structures précédente alors A est indéfinie.*

Il existe aussi des relations qui permettent de déterminer si une matrice est semi définie positive ou négative en étudiant les sous-matrices principales de A qui sont plus difficiles à appliquer.

Proposition *Soit A une matrice symétrique d'ordre n alors :*

- *A est semi définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs ou nuls.*
- *A est semi définie négative si et seulement si tous ses mineurs principaux d'ordre impairs sont négatifs ou nuls, et si tous les mineurs principaux d'ordre pair sont positifs ou nuls.*

Exemple :
$Q_1(x,y) = x^2 + 2.y^2 + 2xy$
$Q_2(x,y) = xy$
$Q_3(x,y) = 2x^2 + 8.y^2 + 8xy$
$Q_4(x,y) = x^2 - 2xy + .y^2$

4.4.3 Représentation graphique

4.5 Extremum d'une forme quadratique

4.5.1 Optimisation libre

Quand une forme quadratique est définie positive, alors elle est toujours strictement positive sauf pour $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$, ainsi elle admet un minimum global atteint uniquement en $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ qui vaut $Q\left(\overrightarrow{0}\right) = 0$.

De même, une forme quadratique définie négative admet un maximum global atteint uniquement en $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ qui vaut 0.

Par contre, une forme quadratique semi définie positive s'annule sur tout un sous-espace vectoriel. Elle admet bien un minimum global qui vaut 0 mais celui ci est atteint pour de nombreuses valeurs de X. En fait, les valeurs qui annulent la forme quadratique sont les éléments du sous-espace propre associé à 0, c'est à dire le noyau.

Quant aux formes quadratiques indéterminées elles n'admettent ni maximum ni minimum.

Exemple :
$Q(X,Y) = X^2 + Y^2 - XY$
$Q(X,Y) = X^2 - 2Y^2 + 2.XY$

4.5.2 Optimisation sous contrainte linéaire

Certaines formes quadratiques peuvent être non définies sur E mais atteindre des maxima si on les restreint sur un sous-espace (avec des contraintes linéaires).

Ainsi $Q(x,y,z) = -x^2 + (y+z)^2 - (y-z)^2$ est non définie car son profil est $(1,2)$.

Par contre, sur $y + z = 0$ alors $Q(x,y,z) = -x^2 - (y-z)^2$ est définie négative et admet donc un maximum.

Il existe une méthode générale pour savoir comment est définie une forme quadratique sur un ensemble de contraintes linéaires libres entre elles.

Proposition *Supposons que l'on désire déterminer le signe d'une forme Q de matrice A sur un ensemble de p contraintes linéaires définies par* $B.X = \overrightarrow{0}$

Alors on construit la matrice carrée symétrique bordée d'ordre $(p+n) * (p+n)$ *suivante :*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & B \\ {}^tB & A \end{bmatrix}$$

1. *Si* $\det H$ *est du signe de* $(-1)^n$ *et si les* $n - p$ *derniers mineurs diagonaux principaux sont de signes alternées alors Q est définie négative sur l'ensemble des contraintes tel que* $B.X = \overrightarrow{0}$*. Donc on a un maximum global de Q qui vaut 0 sur ce sous-espace atteint uniquement en* $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.
2. *Si les* $n - p$ *derniers mineurs principaux sont du signe de* $(-1)^p$ *(y compris* $\det H$*) alors Q est définie positive sur l'ensemble tel que* $B.X = \overrightarrow{0}$*. Donc on a un minimum global de Q qui vaut 0 sur ce sous-espace atteint uniquement en* $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$.
3. *S'il existe un mineur diagonal principal non nul tel que aucun des 2 cas précédents ne soit vérifié alors Q est non définie sur l'ensemble et n'admet donc ni maximum ni minimum.*

Remarque :
Si l'un des n- mineurs diagonaux principaux est nul la méthode précédente ne onctionne pas.

Exemple :
$Q\,(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$
Étudiez les optima de Q sur $x + y = 0$

4.6 Exercice

Soit $Q\,(x, y, z) = x(x - 4y) + 2y(y - z) + z(2x + \frac{5}{2}z)$

a) Démontrez que Q est une forme quadratique.

b) Déterminez sa matrice associée A.

c) Trouvez une décomposition canonique de Q en utilisant Gauss.

d) Donnez la signature et la nature de cette forme quadratique.

e) Calculez le déterminant de A. Le signe trouvé vous parait-il cohérent ? (justifiez soigneusement).

f) A partir de la décomposition de Gauss, trouvez des sous-espaces les plus grands possibles F_+ et F_- tels que
— Q soit définie positive sur F_+.
— Q soit définie négative sur F_-.

Décrivez la représentation graphique de F_+ et F_- et donnez leurs dimensions.