Chapitre 7

Nombres complexes

7.1 Le corps des imaginaires

Définition *On définit le nombre noté i comme un nombre imaginaire tel que* $i^2 = -1$.

Ceci permet de définir le corps des complexes $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des éléments de la forme $z = a + i.b$

a est appelé la partie réelle

b est appelé la partie imaginaire

Lorsque $b = 0$ il s'agit d'un réel standard

Lorsque $a = 0$ on est en présence d'un imaginaire pur.

Définition *Soit* $z = a + i.b$*, on appelle complexe* ***conjugué*** *et on note* $\overline{z}$ *le complexe de même partie réelle et de partie imaginaire l'opposée de celle de* z*. Donc* $\overline{z} = a - i.b$

7.2 Résolution d'équation du second degré à coefficients réels

On considère une équation du second degré : $a.z^2 + b.z + c = 0$

Alors cette equation admet toujours 2 racines distinctes ou 1 racine double dans $\mathbb{C}$.

Détermination des racines

$\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta \geq 0$ alors $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Sinon $\Delta < 0$ et les solutions sont $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

En fait, en définissant "$\sqrt{-2}$" $= i.\sqrt{2}$ ou $-i.\sqrt{2}$, on voit que la première formule (pour $\Delta \geq 0$) est valable dans tous les cas.

Exemple :
Résolvez $z^2 - 3z + 4 = 0$

7.3 Représentation graphique

Tout nombre complexe $a+ib$ peut se représenter dans $\mathbb{R}^2$. De même, à tout élément de $\mathbb{R}^2$ on peut associer un unique $a+ib$. Il y a donc un isomorphisme entre le corps des complexes $\mathbb{C}$ et le plan $\mathbb{R}^2$.

Le complexe conjugué $\overline{z}$ est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses du complexe z.

Dans la mesure où on a une norme sur $\mathbb{R}^2$, on peut définir la norme d'un complexe qui est appelé le module.

Définition *On appelle* **module** *d'un complexe l'équivalent de la norme sur* $\mathbb{R}^2$*. Si* $z = a + i.b$ *son module vaut* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriétés :
- $z.\overline{z} = |z|^2$
- Le module d'un produit est le produit des modules : $|z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$

Exemple :
- Calculez la partie réelle et imaginaire du complexe suivant : $z = \frac{1+3i}{1-i} + i$.
- Résolvez l'équation suivante : $z = 1 + i - 2i\overline{z} + \frac{i}{1-i}$.

Dans $\mathbb{R}^2$ on peut représenter un point par ses coordonnées x, y mais on peut aussi le représenter par l'angle par rapport à la droite des abscisses et la distance à l'origine.

Définition *Soit un triangle rectangle alors le cosinus de l'angle* α *est* $\cos\alpha = \frac{\textit{Coté adjacent}}{\textit{hypothénuse}}$

Le sinus de l'angle α *est :* $\sin\alpha = \frac{\textit{Coté opposé}}{\textit{hypothénuse}}$

Enfin la tangente de α *est :* $\tan\alpha = \frac{\textit{Coté opposé}}{\textit{Coté adjacent}}$

Propriétés :
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- D'après le théorème de Pythagore $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- Les fonctions $\cos, \sin, \tan$ sont bien évidemment périodique de période 2π. Ainsi $cos(x + 2k\pi) = \cos x$

Définition *On appelle **argument** d'un complexe l'angle entre la droite des abscisses et la droite joignant l'origine au nombre complexe.*

Remarque :
On utilise en général les radians pour l'unité angulaire $\theta \in [0, 2\pi]$
Ainsi si a est un réel positif : $\arg(a) \equiv 0 \mod 2\pi$ et $\arg(-a) \equiv \pi \mod 2\pi$
Si b est un réel positif : $\arg(i.b) = \pi/2 \mod 2\pi$ et $\arg(-i.b) = -\pi/2 \mod 2\pi$

Définition *On appelle coordonnées polaires d'un complexe le couple* (ρ, θ) *où* $\rho = |z|$ *et* $\theta = \arg(z)$

Proposition *Soit* $z = a + i.b$*, alors* $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ *et* $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$

Exemple :
Trouvez les coordonnées polaires du complexe $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}.i$.

Proposition *Deux complexes sont égaux si et seulement si leur module et leur argument sont égaux.*

7.4 Exponentielle d'un imaginaire pur

Lorsque l'on a un complexe sous forme polaire, on utilise souvent la notation $z = \rho.e^{i\theta}$.
On définit donc l'exponentielle d'un complexe comme étant
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Proposition (Formule de Moivre)
Soit θ *un angle alors :* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

On vérifie donc que $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
De même, on a $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}.e^{i\varphi}$
Ainsi, $\arg(z^n) = n.\arg z$
On a aussi $\arg(z_1.z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
De plus, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

Remarque :
L'argument a les mêmes propriétés que le logarithme népérien.

Proposition (Formule d'Euler)
Soit θ *un angle alors :* $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

(A prouver)

Exercices

— En utilisant deux méthodes, trouvez les complexes tel que $z^2 = \overline{z}$.

— Trouvez les complexes tel que $z^3 = \overline{z}$. Montrez que la méthode directe est difficile alors que la mise sous forme exponentielle permet de résoudre rapidement le problème.

7.5 Racines n-ième

Définition *Soit n un entier strictement positif, on appelle* ***racine n-ième*** *d'un complexe $a+ib$ tout nombre z tel que $z^n = a+ib$.*

Recherche des racines n-ièmes

Si on écrit z sous la forme $z = \rho.e^{i\theta}$

on a : $z^n = \rho^n.e^{ni\theta} = a+ib$

Donc si on écrit $a+ib$ sous forme exponentielle, soit $a+ib = r.e^{i\alpha}$.

Alors par identification on a :

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n.\theta = \alpha \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{1/n} \\ n.\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = r^{1/n} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

On voit ainsi qu'on a n racines distinctes de mêmes modules et d'arguments $\frac{\alpha}{n}; \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}; \ldots; \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi.(n-1)}{n}$.

Exemple :

Cherchez les racines 3èmes de 8.

7.6 Résolution d'équation du second degré à coefficients complexes

On considère un polynôme d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$: $az^2+bz+c=0$

Ou a,b et c sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Alors on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

On peut mettre ce complexe sous la forme $\Delta = \rho.e^{i\theta}$

Ensuite on calcule les racines carrées de Δ qui sont au nombre de 2. On obtient δ_1 et δ_2. Avec bien sûr $\delta_2 = -\delta_1$

On voit tout de suite que $\delta_1 = \sqrt{\rho}.e^{i\frac{\theta}{2}}$ et de plus $\delta_2 = \sqrt{\rho}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{\rho}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Les solutions de l'équation sont au nombre de 2

$z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta_1}{2a}$.

Application :

Résolvez $z^2 - (1+3i).z = 2-2i$ dans $\mathbb{C}$

7.7 Quelques formules trigonométriques

Valeurs standards

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$cos(X)$					
$sin(X)$					

Exercices :

Utilisez la notation exponentielle pour trouver et démontrer les formules suivantes

- $\cos(-a)$?
- $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$?
- $\cos(a + \pi)$?
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$?
- $\cos(\pi - a)$?
- $\sin(-a)$?
- $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$?
- $\sin(a + \pi)$?
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$?
- $\sin(\pi - a)$?
- $\cos(a + b)$?
- $\cos(a - b)$?
- $\sin(a + b)$?
- $\sin(a - b)$?
- $\cos(2a)$?
- $\sin(2a)$?

7.8 Exercices

Exercice 1

Trouvez toutes les solutions de $4z^4 - 4iz^3 + (i - 3) .z^2 = \frac{4-2i}{1+i} z$

Exercice 2

Démontrez la proposition suivante

Proposition :

On considère un polynôme d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
$az^2 + bz + c = 0$
alors les solutions de l'équation sont
$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.
où δ est une racine de $\Delta = b^2 - 4ac$

Exercice 3 :
Résoudre $\frac{1}{4}z^2 + \left(1 + \sqrt{3}i\right) z + 1 - \sqrt{3}i = 0$

Exercice 4 :
Démontrez la formule suivante :
$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
en utilisant vos connaissances sur l'exponentielle d'un complexe.