UNIVERSITE PARIS 1 - UFR de GESTION
Thème 2
Les matrices
Licence 2ème année

Exercice 1 :

Calculez lorsque cela est possible :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-1} & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & \text{-1} & 1 \\ \text{-8} & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & \text{-1} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \text{-1} \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

On considère E le R-espace vectoriel des polynômes en X de degré au plus 4.

Soit $u : E \to E$ l'application linéaire définie par $u(p) = p + p'$ où p' est la dérivée de p.

a) Montrez que $\left(1, X, X^2, X^3, X^4\right)$ constitue une base qui convient pour E. Calculez alors la matrice représentative de u pour cette base au départ et à l'arrivée.

b) Montrez que $u - Id$ est nilpotente. Déterminez le plus petit entier $n > 0$ tel que $(u - Id)^n = [0]$.

c) Quelles sont les valeurs propres de u ?

Exercice 3 :

Calculez AB et BA où :

A=$\begin{bmatrix} 0{,}6 & \text{-}0{,}4 & 1 \\ \text{-}0{,}2 & 0{,}3 & 2 \end{bmatrix}$ B=$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comment appelle-t-on A et B étant donné le produit AB ?

Exercice 4 :

Résoudre :

$$\begin{cases} x + y + (1 - m) z = m + 2 \\ (1 + m) x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$$

Exercice 5 :

On considère la matrice $M = \begin{bmatrix} \text{a} & \text{a} & \text{a} \\ \text{-a} & \text{a} & \text{x} \\ \text{-a} & \text{-a} & \text{x} \end{bmatrix}$, pour quelles valeurs du paramètre réel a la matrice M est-elle inversible ? Calculez la matrice inverse par la méthode du pivot.

Exercice 6 :

Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} \text{a} & \text{b} & \text{b} \\ \text{b} & \text{a} & \text{b} \\ \text{b} & \text{b} & \text{a} \end{bmatrix}$ où a et b sont des réels.

a) Cette matrice est-elle diagonalisable ?

b) Trouvez les valeurs propres de M.

c) Trouvez une base de R^3 composée de vecteurs propres de M

d) Trouvez des matrices de passage P et P^{-1} et la matrice diagonale D tels que $A = P.D.P^{-1}$.

Exercice 7 :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

a) Montrer que A est singulière. En déduire une valeur propre de A.
b) Trouvez les autres valeurs propres de A.
c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice réduite diagonale D et déterminez la matrice de passage P associée.
d) Calculez A^n

Exercice 8 :

Soit α est un paramètre réel, on considère l'application suivante :

$$f_\alpha : \begin{cases} R^3 \to R^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y - 2z, 2x + y + \alpha z, 2x + 2y - 3z) \end{cases}$$

a) Justifiez rapidement mais clairement la linéarité de f_α.

b) Déterminez le noyau de f_α en fonction du paramètre α.

c) Déterminez si f_α est injective, surjective ou bijective en fonction du paramètre α.

Pour la suite on suppose que $\alpha = -2$.

c) Déterminez M la matrice représentative de f. La matrice M est-elle inversible ?

d) Déterminez les valeurs propres de M. (Vérifiez vos résultats avec les méthodes usuelles).

e) La matrice est-elle diagonalisable ? (Justifiez). Calculez les vecteurs propres (on choisira des vecteurs tels que la première composante non nulle vaille 1).

f) Donnez la décomposition $M = P.D.P^{-1}$. On calculera toutes les matrices.

g) Calculez explicitement M^n pour tout $n \in N$, puis calculez $f^{46}(2, 1, 2)$.

h) Donnez la solution du système suivant :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + 2Y_n - 2Z_n \\ Y_{n+1} = 2X_n + Y_n - 2Z_n \\ Z_{n+1} = 2X_n + 2Y_n - 3Z_n \end{cases}$$

avec pour conditions initiales $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.